Risoluzione dell'appello del 20/06/2019 (tema A)

Esercizio 1:

(a) Falso. Un controesempio è:

$u = (1,0,0,0)$, $v = (0,1,0,0)$, $w = (1,0,0,0)$

(b) Falso, se si considera anche il vettore nullo.

Infatti un controesempio è:

$u = (1,0,0,0,0)$, $v = (0,0,0,0,0)$, $w = (1,0,0,0,0)$.

Se invece si esclude la possibilità del vettore nullo, l'affermazione è vera. Infatti si ha

$v = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$,

$v \cdot w = 0$,

da cui segue $u \cdot w = (\lambda^{-1} v) \cdot w = \lambda^{-1} (v \cdot w) = 0$.

<u>Esercizio 2:</u> $\quad z^3 = \dfrac{2-23i}{3-2i} + \overline{2+i} =$ $\boxed{2}$

$$= \frac{2-23i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} + 2-i =$$

$$= \frac{52-65i}{13} + 2 - i = 4-5i+2-i =$$

$$= 6-6i = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Per de Moivre si ha che l'equazione ha tre soluzioni distinte date da:

$$z_k = \sqrt[3]{6\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

per $k = 0, 1, 2$.

Esercizio 3:

$U = \langle (2,2,-1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$, $V = \langle (0,1,1,0), (3,1,0,0) \rangle$

(a) Determiniamo delle equazioni per V.

$ax + by + cz + dw = 0$ è soddisfatta dai vettori di V se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$ Risolvendo il sistema si ottiene

$$V: \begin{cases} x - 3y + 3z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Dunque $U \cap V = \{ (x,y,z,w) = \alpha(2,2,-1,1) + \beta(1,-1,1,-1) \mid x - 3y + 3z = 0 \text{ e } z = 0 \}$

da cui si ottiene $\alpha = \beta$, ossia

$U \cap V = \langle (3,1,0,0) \rangle$, una base di $U \cap V$ è $\{(3,1,0,0)\}$

$\dim U \cap V = 1$, da cui segue che $\dim U + V = 3$;

una base di $U + V$ è $\{ (1,-1,1,-1), (0,1,1,0), (3,1,0,0) \}$

(b) Si deve avere $W \subset U+V$ e $W \cap (U \cap V) = \{0\}$. $\boxed{4}$

Per la formula di Grassmann segue che $\dim W = 2$,

ed una base di W si ottiene completando $(3,1,0,0)$ ad

una base di $U+V$ e poi scartando $(3,1,0,0)$.

Dunque si può prendere ad esempio

$W = \langle (1,-1,1,-1), (0,1,1,0) \rangle$.

(c) $U+V = \langle (1,-1,1,-1), (0,1,1,0), (3,1,0,0) \rangle$

$\dim U+V = 3$.

Per completare la base trovata di $U+V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$

è necessario trovare un vettore $v \notin U+V$.

Si vede facilmente che $(1,0,0,0) \notin U+V$, infatti

$(1,0,0,0) = \alpha(1,-1,1,-1) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(3,1,0,0)$

non ammette soluzioni. Si conclude che

$\{(1,-1,1,-1), (0,1,1,0), (3,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ è una

base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4: $\phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$

(a) Polinomio caratteristico di ϕ_k:

$$P_{\phi_k}(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} k-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & -k \\ 0 & 0 & k+1-t \end{pmatrix}$$

$$= -\left(t-k\right)\left(t-1\right)\left(t-(k+1)\right)$$

radici di $P_{\phi_k}(t)$: $1, k, k+1$

autovalori di ϕ_k e relativa molteplicità algebrica:

caso $k \neq 0,1$

ϕ_k ha 3 autovalori distinti di molteplicità algebrica e geometrica 1:

$1, k, k+1$

caso $k=0$:

autovalori di ϕ_k: $\begin{cases} 0 & \text{con molt. alg. } 1 \\ 1 & \text{con molt. alg. } 2 \end{cases}$

caso $k=1$:

autovalori di ϕ_k: $\begin{cases} 1 & \text{con molt. alg. } 2 \\ 2 & \text{con molt. alg. } 1 \end{cases}$

(b) per $k \neq 0,1$, ϕ_k è diagonalizzabile poiché ha 3 autovalori distinti.

Studiamo gli autospazi di ϕ_k:

<u>caso $k \neq 0,1$:</u>

$$V_1 = \ker\left(\phi_k - id_{\mathbb{R}^3}\right) = \ker\left(A_k - I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$= \langle (1, 1-k, 0) \rangle$$

$$V_k = \ker\left(A_k - k I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \langle (1,0,0) \rangle$$

$$V_{k+1} = \ker\left(A_k - (k+1) I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle (1,-1,1) \rangle$$

(la determinazione degli autospazi in questo caso $k \neq 0,1$ non era necessaria ai fini di determinare la diagonalizzabilità di ϕ_k)

<u>caso $k=0$:</u>

$$V_0 = \ker A_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$V_1 = \ker (A_0 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$\dim V_1 = 2 =$ molt. alg. di 1

Dunque A_0 è diagonalizzabile

<u>caso $k=1$:</u>

$$V_1 = \ker (A_1 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$V_2 = \ker (A_1 - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (2,2,-1) \rangle$$

$\dim V_1 = 1 < 2 =$ molt. alg. di 1

Dunque A_1 non è diagonalizzabile.

Si conclude che ϕ_k è diagonalizzabile per $k \neq 1$.

(c) $\Phi_{-1}^{-1}(1,1,0)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} -x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

dunque si ottiene $\Phi_{-1}^{-1}(1,1,0) = (0,1,0) + \langle (1,1,-1) \rangle$

Esercizio 5: Determiniamo una base di W.

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Dunque $W = \langle (1,-1,0), (0,-2,1) \rangle$, $\dim W = 2$

ortonormalizziamo la base $\{(1,-1,0), (0,-2,1)\}$ di W:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$u_2' = (0,-2,1) - \left((0,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$= (0,-2,1) - (1,-1,0) = (-1,-1,1)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$$

Una base ortonormale di W è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)\right\}$.

(b) $\pi_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la proiezione ortogonale su W. $\boxed{10}$

$$\pi_W(-1,1,-1) = \left((-1,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) +$$

$$+ \left((-1,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$$

$$= (-1,1,0) + \frac{1}{3}(1,1,-1)$$

$$= \frac{1}{3}(-2,4,-1)$$

Un'altra possibile maniera di procedere è la seguente

$$\pi_W(-1,1,-1) = (-1,1,-1) - \left((-1,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

$$= (-1,1,-1) + \frac{1}{3}(1,1,2) = \frac{1}{3}(-2,4,-1)$$

$\pi_W^{-1}(-2,1,1) = \emptyset$ poiché si verifica che

$(-2,1,1) \notin W$.

(c) $W = \langle (1,-1,0), (-1,-1,1) \rangle$

$W^{\perp} = \langle (1,1,2) \rangle$

sia $v = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,2)$

allora si ha $\pi_W(v) = \alpha(1,-1,0)$

inoltre $\|v\| = \sqrt{2\alpha^2 + 6\beta^2}$ e

$$\|\pi_W(v)\| = \sqrt{2} \cdot |\alpha|$$

Dunque l'equazione $\|v\| = 2\,\|\pi_W(v)\|$

equivale a

$$\sqrt{2\alpha^2 + 6\beta^2} = 2\sqrt{2}\,|\alpha|$$, ossia

$$2\alpha^2 + 6\beta^2 = 8\alpha^2$$

dunque $6\beta^2 = 6\alpha^2$, da cui $\alpha = \pm\beta$

ad esempio $v = (1,-1,0) + (1,1,2) = (2,0,2)$

Esercizio 6: $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (3,-1,0)$,

$\pi_1 = (0,-1,2) + \langle (2,1,0), (1,1,2) \rangle$

$\pi_2 : 2x - y + z = 2$

(a) Risolvendo l'equazione di π_2 si ottiene

$\pi_2 = (1,0,0) + \langle (1,2,0), (0,1,1) \rangle$

Un'equazione per π_1 sarà del tipo $ax + by + cz + d = 0$ soddisfacente a

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$$ dunque $(a,b,c) = (2,-4,1)$

imponendo il passaggio per $(0,-1,2)$ si ottiene

$\pi_1 : 2x - 4y + z - 6 = 0$

(b) $r = (3,-1,0) + \langle (2,-4,1) \rangle$

$$r : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$$

(c) $r = (3,-1,0) + \langle (2,-4,1) \rangle$

$P_1 = (1,2,3)$

Sia $\bar{\pi}$ il piano ortogonale a r passante per P_1

$\bar{\pi}: 2x-4y+z+3=0$

Determiniamo $r \cap \bar{\pi}$:

$$r: \begin{cases} x = 3+2\alpha \\ y = -1-4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$ forma parametrica

Imponendo l'equazione che definisce $\bar{\pi}$ si ottiene

$6+4\alpha+4+16\alpha+\alpha+3=0$

$21\alpha = 13 \implies \alpha = \frac{13}{21}$

Dunque $P = r \cap \bar{\pi} = \left(\frac{89}{21}, \frac{-73}{21}, \frac{13}{21}\right)$

Si ha

$\mathrm{dist}(P_1, r) = \mathrm{dist}(P_1, P) = \| P - P_1 \|$

$= \frac{1}{21} \| (68, 115, -50) \| = \frac{\sqrt{68^2+115^2+50^2}}{21} \simeq 6{,}8$