Risoluzione dello scritto del 10/07/2019 (tema A)

Esercizio 1: Sia $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Allora si ha

$$2\,\frac{a+ib}{1-i} + (1+2i)(a-ib) = 8+9i$$

da cui

$$\frac{2}{(1-i)(1+i)} \cdot (a+ib)(1+i) + (1+2i)(a-ib) = 8+9i$$

segue

$$(a-b) + i(a+b) + (a+2b) + i(2a-b) = 8+9i$$

ossia $\quad (2a+b) + i(3a) = 8+9i$

Si ottiene dunque il sistema lineare seguente per la parte reale a e la parte immaginaria b del numero complesso z:

$$\begin{cases} 2a+b = 8 \\ 3a = 9 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene $\quad z = 3+2i$.

Esercizio 2: Si ha

$$w = (1 - i\sqrt{3})^{10} = \left(2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)\right)^{10}$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right)$$

Poiché $-\frac{10}{3}\pi = -4\pi + \frac{2}{3}\pi$, si ha

$$w = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{9}(1 - i\sqrt{3}).$$

Esercizio 3: $u = (1,2,-1)$, $v = (0,-1,1)$, $w = (0,0,1)$.

(a) I vettori u, v, w sono lin. ind. poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Dunque $\{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Si conclude che esiste una ed una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che assume i valori specificati sui vettori u, v, w.

(b) Si ha $f(u) = u + v = (1,1,0)$,

$f(v) = (-1,0,0) + u = (0,2,-1)$,

$f(w) = (1,3,0) - w = (1,3,-1)$.

Dunque $\mathrm{Im}\, f = \langle (1,1,0), (0,2,-1), (1,3,-1) \rangle$.

Poiché $(1,3,-1) = (1,1,0) + (0,2,-1)$, si ha che $\{(1,1,0), (0,2,-1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\, f$ e $\{u + v - w\} = \{1,1,-1\}$ è una base di $\ker f$.

(c)

Consideriamo la base $\mathcal{V} = \{u, v, w\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Allora si ha

$$A_{\mathcal{V}, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiando base si ha

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f} = A_{\mathcal{V}, \mathcal{E}_3, f} \, A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{V}, id_{\mathbb{R}^3}}.$$

Inoltre

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{V}, id_{\mathbb{R}^3}} = \left(A_{\mathcal{V}, \mathcal{E}_3, id_{\mathbb{R}^3}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calcolando l'inversa si trova

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{V}, id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque si conclude

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) I vettori $z \in \mathbb{R}^3$ t.c. $f(z) = (-1,1,-1)$, $\boxed{5}$

sono le soluzioni (x_1, x_2, x_3) del sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che il suo insieme delle soluzioni è della forma:

$$(1,-1,0) + \langle (1,1,-1) \rangle .$$

Esercizio 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) $P_\phi(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 1 \\ -1 & -t & -2 \\ 1 & -2 & -t \end{pmatrix} =$

$$= (1-t)(t^2-4) + (t+2) + (2+t)$$

$$= (t+2)\left[(1-t)(t-2) + 2\right]$$

$$= -(t+2)(t-3)\,t$$

L'endomorfismo ϕ ha gli autovalori $-2, 0, 3$

con molteplicità algebrica 1.

(b) Φ è ortogonalmente diagonalizzabile poiché la matrice A è simmetrica.

Determiniamo gli autospazi di Φ.

$$V_0 = \ker A = \langle (2,1,-1) \rangle$$

$$V_{-2} = \ker (A + 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$V_3 = \ker (A - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

Una base ortonormale di autovettori di Φ è ad esempio $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$

(c) Sia $D = A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e $K = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B},id_{\mathbb{R}^3}} = \left(A_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} \right)^{-1} = \left(A_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} \right)^t$.

Allora
$$K = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad e \quad A = K^t D K.$$

<u>Esercizio 5</u>: $\pi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ proiezione sul sottospazio $W: x - 2y + 2z + w = 0$, lungo il sottospazio $U = \langle (1,-1,2,1) \rangle$. $\boxed{8}$

(a) Si ha $(\ker \pi)^\perp = U^\perp : x - y + 2z + w = 0$.

(Si osserva che U e W sono ortogonali, quindi π è la proiezione ortogonale su W)

Determiniamo una base di W risolvendo l'equazione che lo definisce.

$W = \langle (1,1,0,0), (2,0,-1,0), (1,0,0,-1) \rangle$.

$\{(1,1,0,0), (2,0,-1,0), (1,0,0,-1)\}$ è una base di W.

(b) Si ha $\pi(4,0,1,1) = (4,0,1,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,2,1)\cdot(4,0,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,2,1)$

(si è osservato che π è una proiezione ortogonale)

Dunque

$$\pi(4,0,1,1) = (4,0,1,1) - (1,-1,2,1) = (3,1,-1,0)$$

(c) Poiché $v + \alpha(2,1,-2,2) = 2\pi(v)$,

scrivendo $v = v_{//} + v_{\perp}$ con

$v_{//} = \pi(v) \in W$ e $v_{\perp} \in U$, si ha

$$v_{//} - v_{\perp} = \alpha(2,1,-2,2) \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, scrivendo $(2,1,-2,2) = u_{//} - u_{\perp}$,

con $u_{//} \in W$ e $u_{\perp} \in U$, si ha

$$v_{//} - \alpha u_{//} = v_{\perp} - \alpha u_{\perp}$$

Poiché $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$, si conclude che

$v_{//} = \alpha u_{//}$ e $v_{\perp} = \alpha u_{\perp}$, e quindi

$$v = v_{//} + v_{\perp} = \alpha(u_{//} + u_{\perp}) \in \langle u_{//} + u_{\perp} \rangle .$$

Determiniamo ora $u_{//}$ e $u_{\perp}$ e dunque il vettore $u_{//} + u_{\perp}$.

$$(2,1,-2,2) = u_{//} - u_{\perp} \quad , \text{ con } u_{\perp} = a(1,-1,2,1)$$

dunque $(2,1,-2,2) = u_{//} - a(1,-1,2,1)$.

Per determinare a, si prende il prodotto scalare di ambo i membri per $(1,-1,2,1)$, ottenendo:

$$(2,1,-2,2)\cdot(1,-1,2,1) = -a\,(1,-1,2,1)\cdot(1,-1,2,1)$$

da cui $-1 = -a\cdot 7$, ossia $a = 1/7$.

Segue $u_{\perp} = \frac{1}{7}(1,-1,2,1)$ e

$$u_{//} = (2,1,-2,2) + \frac{1}{7}(1,-1,2,1) = \frac{1}{7}(15,6,-12,15)$$

Si conclude che v è un qualsiasi vettore del sottospazio $\langle(16,5,-10,16)\rangle$.

Esercizio 6:

(a) $\pi_1 = (1,0,1) + \langle (2,1,1),(1,1,0) \rangle : x - y - z = 0$

Dunque

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$r = (1,1,0) + \langle (3,1,2) \rangle$$

(b) $\pi = (1,1,0) + \langle (3,1,2),(3,0,1) \rangle$

$$\pi : \quad x + 3y - 3z - 4 = 0$$

(c) Poiché $(1,1,1)$ soddisfa $x + y - 2z = 0$, si ha che t e π_2 sono paralleli e

$$\operatorname{dist}(t, \pi_2) = \operatorname{dist}((0,1,0), \pi_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$