Risoluzione dello scritto del 24/01/2020 (traccia A) $\boxed{1}$

Esercizio 1 :

(i) VERO.

dimostrazione :

Siano $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0_V$.

Allora, per linearità di f, si ha

$$\begin{array}{ccc} a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) & = & f(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) \\ & & \parallel \\ 0_W & = & f(0_V) \end{array}$$

Segue che $a_1, \dots, a_k = 0$, poiché $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. $\square$

(ii) FALSO.

dimostrazione :

Un controesempio è il seguente.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x,y) = (0,0)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$. $\square$

Esercizio 2:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ t.c. $A^k = O_{M_n(\mathbb{R})}$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un autovalore di A, e sia $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore α i.e. si ha $v \neq O_{\mathbb{R}^n}$ e $Av = \alpha v$.

Dunque $A^k v = A \circ A \cdots \circ A v = A^{k-1} \alpha v = \alpha A^{k-1} v$

quindi per induzione si ha $A^k v = \alpha^k v$.

Inoltre $A^k = O_{M_n(\mathbb{R})}$, da cui segue anche

$A^k v = O_{M_n(\mathbb{R})} v = O_{\mathbb{R}^n}$.

Si ottiene $\alpha^k v = O_{\mathbb{R}^n}$ e poiché $v \neq O_{\mathbb{R}^n}$, si conclude che $\alpha = 0$. □

Questo implica in particolare (i) e (ii), poiché gli autovalori di A sono le radici del suo polinomio caratteristico.

Esercizio 3:

$U: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$W_t = \langle (4, 0, t-13, -2t), (0, 2, t+1, -2t) \rangle$

(i) $u = (1,1,0,1) \in U$

$\dim U = 3$ poiché $U \subset \mathbb{R}^4$ è definito da un'equazione.

Risolviamo l'equazione.

variabili libere: x_2, x_3, x_4

u è la soluzione che corrisponde alla scelta

$(x_2, x_3, x_4) = (1,0,1)$.

Completiamo $(1,0,1)$ ad una base di $\mathbb{R}^3$: $(1,0,1), (0,2,0), (0,0,2)$.

A questa scelta corrisponde la base

$\{ u, (-1,0,2,0), (-1,0,0,2) \}$

(ii) $u' = (1,2,1,3)$ corrisponde alla scelta $(x_2, x_3, x_4) = (2,1,3)$,

si ha $(2,1,3) = 2(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,2,0) + \frac{1}{2}(0,0,2)$.
Si conclude che le coordinate di u' rispetto alla base trovata sono $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 4 : $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 16x_3,\ -x_1 + x_2 + 7x_3,\ x_2 + tx_3)$$

(i)

$$A_t = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, f_t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -16 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

riducendo in forma a scala si ha

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -16 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & t \end{matrix} \quad \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & t \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

dunque $\operatorname{rk} A_t = 3$ per $t \neq 2$ e $\operatorname{rk} A_2 = 2$.

Segue che f_t è iniettiva per $t \neq 2$ ed

f_t ha rango minimo per $t = 2$.

(ii) $t_0 = 2$

$$\ker f_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

dunque $\ker f_2 = \langle (5,-2,1) \rangle$

Inoltre $\operatorname{Im} f_2 = \langle (1,2,-1,0), (1,-3,1,1) \rangle$

$$= \langle (1,2,-1,0), (0,5,-2,-1) \rangle$$

Troviamo delle equazioni di $\operatorname{Im} f_2$ imponendo alla generica equazione $ax + by + cz + dw = 0$ di essere soddisfatta dai generatori trovati di $\operatorname{Im} f_2$.

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 5b - 2c - d = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (c,d) = (5,0) \rightsquigarrow (a,b,c,d) = (1,2,5,0) \\ (c,d) = (0,5) \rightsquigarrow (a,b,c,d) = (-2,1,0,5) \end{array}$$

dunque $\operatorname{Im} f_2 : \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ -2x + y + 5w = 0 \end{cases}$

(iii) Si trova $(3,-4,1,2) = (1,2,-1,0) + 2(1,-3,1,1)$, da cui segue $f_2^{-1}(3,-4,1,2) = (1,2,0) + \langle (5,-2,1) \rangle$

Esercizio 5: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$A = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) La matrice A è simmetrica, dunque ortogonalmente diagonalizzabile, per il teorema spettrale.

(ii) polinomio caratteristico

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -2 & -2 \\ -2 & 1-t & -2 \\ -2 & -2 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)(3-t)(-3-t)$$

autovalori: -3 di molteplicità 1
3 " " 2

autospazi:

$$V_{-3} = \ker \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1) \rangle$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1), (1,0,-1) \rangle$$

(iii) $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \right\}$ è una base ortonormale di autovettori di A.

Inoltre $A_{\mathcal{B},\mathcal{B},f} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6:

$P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (2,0,2)$, $P_3 = (4,1,1)$

(i) L'unico piano $\bar{\pi}$ passante per P_1, P_2, P_3 è il piano di forma parametrica

$$\bar{\pi} = P_1 + \langle P_2 - P_1 , P_3 - P_1 \rangle = (1,1,0) + \langle (1,-1,2), (3,0,1) \rangle$$

Troviamo un'equazione di $\bar{\pi}$.

$$(1,-1,2) \times (3,0,1) = (-1, 5, 3)$$

dunque $\bar{\pi} : -x + 5y + 3z + d = 0$

imponendo $P_1 \in \bar{\pi}$, si ottiene $\bar{\pi} : -x + 5y + 3z - 4 = 0$

(ii) Un piano $\bar{\pi}'$ parallelo a $\bar{\pi}$ avrà equazione
$\bar{\pi}' : -x + 5y + 3z + d = 0$ con $d \in \mathbb{R}$.

Inoltre $\mathrm{dist}(\bar{\pi}, \bar{\pi}') = \mathrm{dist}(P_1, \bar{\pi}') = \dfrac{|4+d|}{\sqrt{35}} = \sqrt{35}$

dunque i due piani cercati sono

$\bar{\pi}' : -x + 5y + 3z - 39 = 0$ e $\bar{\pi}'' : -x + 5y + 3z + 31 = 0$

(iii) Sia $r = P + \langle w \rangle$

con w ortogonale a $(1,2,1)$ e a $(-1,5,3)$

si ha $(1,2,1) \times (-1,5,3) = (1,-4,7)$

dunque $\langle w \rangle = \langle (1,-4,7) \rangle$

inoltre P deve essere tale che $\mathrm{dist}(P, \pi') = \mathrm{dist}(P, \pi'')$, si può quindi prendere per P un qualsiasi punto del piano π.

Ad esempio $r = (1,1,0) + \langle (1,-4,7) \rangle$

da cui si possono derivare le seguenti equazioni per r:

$$r : \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 7x - z = 7 \end{cases}$$