A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

11 febbraio 2020

ESERCIZI

Esercizio 1.

(i) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = \frac{5(2+3i)}{-1+2i} + \frac{-2+8i}{2}$.

(ii) Determinare due numeri complessi $b, c \in \mathbb{C}$ tali che il polinomio $X^2 + bX + c$ abbia come radici i numeri complessi w e $1 - w$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $u = (1, 1, 2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^5$ ed il sottospazio $U =< u, v >$ di $\mathbb{R}^5$ generato da questi vettori.

(i) Si determini una base ortonormale di U.

(ii) Si determini una base dell'ortogonale $U^\perp$ di U.

(iii) Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $w_1 \in U$, $w_2 \in U^\perp$ e $w_1 - w_2 = (2, 0, 1, 2, 0)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, tale che

$$\Phi_k(1, 0, 0) = (1, 1, k), \qquad \Phi_k(0, 1, 1) = (1, 1, 1), \qquad \Phi_k(1, 0, -1) = (-1, k, k).$$

(i) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

(ii) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}(0, 0, 1)$ del vettore $(0, 0, 1)$ tramite l'applicazione Φ_k.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$B_k = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_k} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -k \\ -6 & -4 & 2k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di Ψ_k e la loro molteplicità algebrica.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per ogni autospazio di Ψ_k.

(iii) Determinare per quali k l'endomorfismo Ψ_k è diagonalizzabile, e per tali valori, determinare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile P_k tali che si abbia $D_k = (P_k)^{-1} B_k P_k$.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1,0,1) + < (2,-1,1), (-1,1,0) >, \qquad \pi_2 : 3x + y - 2z = 2$$

(i) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(ii) Determinare il piano π passante per il punto $(1,2,0)$ ed ortogonale ai piani π_1 e π_2.

(iii) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta t definita dalle equazioni $x + y = 1$ e $y + z = 1$.

Esercizio 6. Siano U, V, W dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Per ognuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa; nel caso sia vera la si dimostri, nel caso sia falsa si fornisca un controesempio.

(i) Se U è in somma diretta con V e V è in somma diretta con W, allora V è in somma diretta con $U + W$.

(ii) Se $U + W = \mathbb{R}^4$ e l'intersezione tra U e V è il sottospazio nullo, allora l'intersezione di V e W ha dimensione almeno uno.

(iii) Se $U + V = U + W$, allora $\dim(V) = \dim(W)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

11 febbraio 2020

ESERCIZI

Esercizio 1.

(i) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = \frac{5(2-3i)}{-1-2i} + \frac{-2-8i}{2}$.

(ii) Determinare due numeri complessi $b, c \in \mathbb{C}$ tali che il polinomio $X^2 + bX + c$ abbia come radici i numeri complessi w e $1 - w$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $u = (-1, 1, -2, 2, 2)$ e $v = (-3, 3, -1, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^5$ ed il sottospazio $U =< u, v >$ di $\mathbb{R}^5$ generato da questi vettori.

(i) Si determini una base ortonormale di U.

(ii) Si determini una base dell'ortogonale $U^\perp$ di U.

(iii) Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $w_1 \in U$, $w_2 \in U^\perp$ e $w_1 - w_2 = (-2, 0, -1, 2, 0)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, tale che

$$\Phi_k(1, 0, 0) = (1, 1, k + 1), \quad \Phi_k(0, 1, 1) = (1, 1, 1), \quad \Phi_k(1, 0, -1) = (-1, k + 1, k + 1).$$

(i) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

(ii) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}(0, 0, 1)$ del vettore $(0, 0, 1)$ tramite l'applicazione Φ_k.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$B_k = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_k} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -k-1 \\ -6 & -4 & 2k+2 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di Ψ_k e la loro molteplicità algebrica.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per ogni autospazio di Ψ_k.

(iii) Determinare per quali k l'endomorfismo Ψ_k è diagonalizzabile, e per tali valori, determinare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile P_k tali che si abbia $D_k = (P_k)^{-1} B_k P_k$.

(voltare pagina)

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (-1,0,1) + <(-2,-1,1),(1,1,0)>, \qquad \pi_2 : -3x + y - 2z = 2$$

(i) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(ii) Determinare il piano π passante per il punto $(-1,2,0)$ ed ortogonale ai piani π_1 e π_2.

(iii) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta t definita dalle equazioni $-x + y = 1$ e $y + z = 1$.

Esercizio 5. Siano U, V, W dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Per ognuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa; nel caso sia vera la si dimostri, nel caso sia falsa si fornisca un controesempio.

(i) Se U è in somma diretta con V e V è in somma diretta con W, allora V è in somma diretta con $U + W$.

(ii) Se $U + W = \mathbb{R}^4$ e l'intersezione tra U e V è il sottospazio nullo, allora l'intersezione di V e W ha dimensione almeno uno.

(iii) Se $U + V = U + W$, allora $\dim(V) = \dim(W)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

11 febbraio 2020

ESERCIZI

Esercizio 1.

(i) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = \frac{5(2+3i)}{1-2i} - \frac{-2+8i}{2}$.

(ii) Determinare due numeri complessi $b, c \in \mathbb{C}$ tali che il polinomio $X^2 + bX + c$ abbia come radici i numeri complessi w e $1 - w$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $u = (1, -1, 2, -2, 2)$ e $v = (3, -3, 1, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^5$ ed il sottospazio $U =< u, v >$ di $\mathbb{R}^5$ generato da questi vettori.

(i) Si determini una base ortonormale di U.

(ii) Si determini una base dell'ortogonale $U^\perp$ di U.

(iii) Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $w_1 \in U$, $w_2 \in U^\perp$ e $w_1 - w_2 = (2, 0, 1, -2, 0)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, tale che

$$\Phi_k(1, 0, 0) = (1, 1, 2k), \qquad \Phi_k(0, 1, 1) = (1, 1, 1), \qquad \Phi_k(1, 0, -1) = (-1, 2k, 2k).$$

(i) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

(ii) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}(0, 0, 1)$ del vettore $(0, 0, 1)$ tramite l'applicazione Φ_k.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$B_k = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_k} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2k \\ -6 & -4 & -4k \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di Ψ_k e la loro molteplicità algebrica.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per ogni autospazio di Ψ_k.

(iii) Determinare per quali k l'endomorfismo Ψ_k è diagonalizzabile, e per tali valori, determinare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile P_k tali che si abbia $D_k = (P_k)^{-1} B_k P_k$.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1,0,1) + < (2,1,1), (-1,-1,0) >, \qquad \pi_2 : 3x - y - 2z = 2$$

(i) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(ii) Determinare il piano π passante per il punto $(1,-2,0)$ ed ortogonale ai piani π_1 e π_2.

(iii) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta t definita dalle equazioni $x - y = 1$ e $-y + z = 1$.

Esercizio 6. Siano U, V, W dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Per ognuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa; nel caso sia vera la si dimostri, nel caso sia falsa si fornisca un controesempio.

(i) Se U è in somma diretta con V e V è in somma diretta con W, allora V è in somma diretta con $U + W$.

(ii) Se $U + W = \mathbb{R}^4$ e l'intersezione tra U e V è il sottospazio nullo, allora l'intersezione di V e W ha dimensione almeno uno.

(iii) Se $U + V = U + W$, allora $\dim(V) = \dim(W)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

11 febbraio 2020

ESERCIZI

Esercizio 1.

(i) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = \frac{5(-3+2i)}{-2-i} - \frac{8+2i}{2i}$.

(ii) Determinare due numeri complessi $b, c \in \mathbb{C}$ tali che il polinomio $X^2 + bX + c$ abbia come radici i numeri complessi w e $1 - w$.

Esercizio 2. Si considerino i vettori $u = (-1, 1, 2, 2, -2)$ e $v = (-3, 3, 1, 1, -1)$ di $\mathbb{R}^5$ ed il sottospazio $U =< u, v >$ di $\mathbb{R}^5$ generato da questi vettori.

(i) Si determini una base ortonormale di U.

(ii) Si determini una base dell'ortogonale $U^\perp$ di U.

(iii) Si determinino due vettori w_1, w_2 tali che $w_1 \in U$, $w_2 \in U^\perp$ e $w_1 - w_2 = (-2, 0, 1, 2, 0)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, tale che

$$\Phi_k(1, 0, 0) = (1, 1, k-1), \quad \Phi_k(0, 1, 1) = (1, 1, 1), \quad \Phi_k(1, 0, -1) = (-1, k-1, k-1).$$

(i) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

(ii) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}(0, 0, 1)$ del vettore $(0, 0, 1)$ tramite l'applicazione Φ_k.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$B_k = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_k} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & k-1 \\ -6 & -4 & 2-2k \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di Ψ_k e la loro molteplicità algebrica.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per ogni autospazio di Ψ_k.

(iii) Determinare per quali k l'endomorfismo Ψ_k è diagonalizzabile, e per tali valori, determinare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile P_k tali che si abbia $D_k = (P_k)^{-1} B_k P_k$.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1,0,-1)+ < (2,-1,-1), (-1,1,0) >, \qquad \pi_2 : 3x + y + 2z = 2$$

(i) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(ii) Determinare il piano π passante per il punto $(1,2,0)$ ed ortogonale ai piani π_1 e π_2.

(iii) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta t definita dalle equazioni $x + y = 1$ e $y - z = 1$.

Esercizio 6. Siano U, V, W dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Per ognuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa; nel caso sia vera la si dimostri, nel caso sia falsa si fornisca un controesempio.

(i) Se U è in somma diretta con V e V è in somma diretta con W, allora V è in somma diretta con $U + W$.

(ii) Se $U + W = \mathbb{R}^4$ e l'intersezione tra U e V è il sottospazio nullo, allora l'intersezione di V e W ha dimensione almeno uno.

(iii) Se $U + V = U + W$, allora $\dim(V) = \dim(W)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.