Correzione dello scritto del 29/06/2020

Esercizio 1:

Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare e tale che

(i) $f(1,0,0,0) = (1,2,-1)$, $f(0,1,0,1) = (6,2,6)$

(ii) $\ker f: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(a) determinare una base di $\ker f$

(b) determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche

(c) determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che $v = (-4,2,\alpha) \in \operatorname{Im} f$

(d) determinare $f^{-1}(v)$, per il v di cui in (c)

Svolgimento:

(a) $\ker f : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

x_1, x_2 vincolate

x_3, x_4 libere

$$\ker f : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$\{(-1,1,1,0), (-2,2,0,1)\}$ è una base di $\ker f$

(b) $f(1,0,0,0) = (1,2,-1)$

$f(0,0,1,0) = f(1,0,1,0) - f(1,0,0,0) = (6,2,6) - (1,2,-1) = (5,0,7)$

$f(0,1,0,0) = f(-1,1,1,0) + f(1,0,0,0) - f(0,0,1,0) = (1,2,-1) - (5,0,7) = (-4,2,-8)$

$f(0,0,0,1) = f(-2,2,0,1) - 2f(-1,1,1,0) + 2f(0,0,1,0) = (10,0,14)$

Dunque si ha

$$A_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

(c) $(-4, 2, \alpha) = a(1,2,-1) + b(6,2,6)$

da cui si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} a + 6b &= -4 \\ 2a + 2b &= 2 \\ -a + 6b &= \alpha \end{aligned}$$

risolvendo le prime due si ottiene $a = 2,\ b = -1$;

dalla terza si ottiene $\alpha = -8$

dunque $v = (-4, 2, -8)$

(d) Inoltre, da (c) risulta anche

$v = (-4,2,-8) = 2(1,2,-1) - (6,2,6)$ ossia

$v = 2f(1,0,0,0) - f(1,0,1,0) = f(1,0,-1,0)$

Segue che $f^{-1}(-4,2,-8) = (1,0,-1,0) + \langle (-1,1,1,0), (-2,2,0,1) \rangle$

Esercizio 2 : $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & -k \\ k & 2 & -k-1 \\ k & 0 & -k+1 \end{pmatrix}$ $\boxed{4}$

(a) determinare autovalori ed autospazi di A_k, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(b) determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ A_k è diagonalizzabile.

(c) determinare P t.c. $P^{-1} A_k P$ è diagonale, per un fissato k.

(d) determinare $rk\, A_k$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento :

(a) polinomio caratteristico :

$$p_{A_k}(t) = -(t-2)\left[(t-(k+1))(t-(-k+1)) + k^2\right] = -(t-2)(t-1)^2$$

autovalori : $2 \quad m_a(2) = 1$

$1 \quad m_a(1) = 2$

autospazi :

$V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ k & 1 & -k-1 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{cases} \langle (1,1,1) \rangle & \text{per } k \neq 0 \\ \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle & \text{per } k = 0 \end{cases}$$

(b) A_k è diagonalizzabile per $k=0$

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\mathrm{rk}\, A_k = 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3:

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = -1+t \end{cases}$$

(a) determinare una forma cartesiana di r

(b) determinare un'equazione del piano π contenente r e $P = (2,3,-1)$

(c) determinare una forma parametrica della retta s, passante per P, contenuta in π e ortogonale a r.

(d) determinare $Q = r \cap s$.

Svolgimento:

(a) $r = (1,1,-1) + \langle (1,2,-1) \rangle$

$$r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

(b) $\pi = (1,1,-1) + \langle (1,2,-1), (1,2,0) \rangle = (1,1,-1) + \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$

$\pi : 2x - y = 1$

(c) $s = (2,3,-1) + \langle (1,2,5) \rangle : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+2t \\ z = -1+5t \end{cases}$

(d) $r \cap s = Q = \frac{1}{6}(11, 16, -11)$