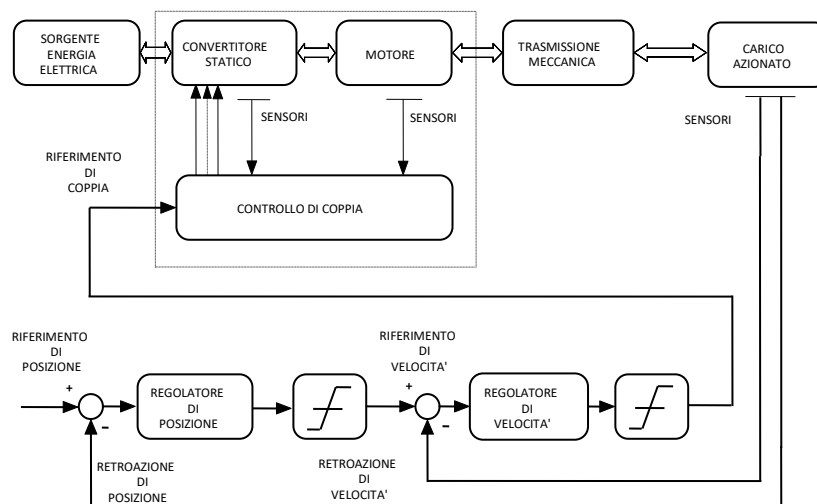


S. BOLOGNANI

Fondamenti di Azionamenti elettrici

PARTE I

# Generalità sugli azionamenti elettrici e controllo di velocità



ver. 25 settembre 2020

# Generalità sulle macchine e sugli azionamenti elettrici

## 1. Macchine elettriche

Un sistema fisico può essere sede di *energia accumulata*, con ciò intendendo che esso ha la possibilità di compiere *lavoro* o di fornire *calore*. All'energia accumulata si dà diversa denominazione (o si dice che è di diversa forma) a seconda della fenomenologia a cui essa è associata. Così si parla di energia potenziale *gravitazionale* di un bacino idroelettrico e di quella *cinetica* di un volano in moto, di quella *elettrostatica* di un condensatore carico e di quella *magnetica* di un solenoide percorso da corrente oppure, ancora, di quella *termica* di un corpo caldo e di quella *elastica* di una molla tesa.

Un sistema può anche scambiare energia con altri sistemi fisici interagenti con esso. All'energia scambiata si dà il nome di *lavoro* o, se essa è in forma termica, di *calore*. Si parla allora di *lavoro (calore) assorbito o ricevuto* da un sistema quando si valuta il flusso di energia entrante in esso. Viceversa, se si fa riferimento al flusso uscente, si parla di *lavoro (calore) fornito o reso*.

In molti casi gli scambi energetici tra due sistemi avvengono in modo naturale ed incontrollato. In altri casi, un terzo sistema viene interposto fra i primi due al fine di produrre e governare un determinato scambio energetico; questo terzo sistema prende il nome di *macchina*. Essa può eseguire allo scopo una trasformazione di forma fra l'energia ricevuta da un sistema e quella fornita all'altro oppure, senza tale trasformazione, può agire sulle grandezze fisiche che determinano il flusso energetico.

Così sono macchine le turbine idrauliche che trasformano l'energia cinetica di un fluido in movimento in lavoro meccanico reso al loro asse; le leve che ricevono energia sotto forma di lavoro meccanico con determinati valori dei fattori forza e spostamento e restituiscono ancora lavoro meccanico con fattori forza e spostamento modificati.

Le *macchine elettriche*, nella comune terminologia corrente, sono quelle in cui almeno uno degli scambi energetici è di natura elettrica, l'altro essendo, se non elettrico, un lavoro meccanico. Una prima fondamentale distinzione fra le macchine elettriche va quindi fatta secondo che in esse si attui solo una *trasformazione delle grandezze elettriche ai loro morsetti di ingresso e di uscita* (trasformazione della tensione, corrente, frequenza o del numero di fasi ecc.) o che in esse si esegua una *conversione elettromeccanica dell'energia*.

Le macchine del primo tipo si chiamano in generale *convertitori elettrici* e sono, nella maggior parte dei casi, *macchine elettriche statiche* cioè prive di organi in movimento. Esse comprendono i *trasformatori elettrici*, il cui funzionamento è basato sul fenomeno della mutua induzione e i *convertitori elettronici di potenza* detti anche *convertitori statici*, che per attuare la loro funzione impiegano interruttori elettronici.

Quelle del secondo tipo sono invece necessariamente *macchine elettriche dinamiche* con organi in movimento rotatorio o lineare. Vengono distinte fra *generatori elettrici*, se progettate e qualificate per fornire lavoro di natura elettrica mentre quello assorbito è meccanico, e *motori elettrici*, se invece sono

destinate a fornire lavoro meccanico ricevendone di elettrico. Peraltro la stessa macchina, pur se concepita principalmente per uno dei servizi può trovarsi ad operare nell'altro.

Questo testo è dedicato alle tecniche di controllo delle macchine elettriche dinamiche, in particolare nel loro funzionamento da motori alimentati da convertitori statici.

## 2. Conversione elettromeccanica dell'energia

Per *conversione elettromeccanica dell'energia* (o semplicemente *conversione elettromeccanica*) si intende il processo mediante il quale si attua una conversione di lavoro elettrico in lavoro meccanico o viceversa.

Il processo della conversione elettromeccanica è alla base del funzionamento delle macchine elettriche dinamiche, e si attua per mezzo di un campo elettrico o di un campo magnetico tramite i quali si possono produrre, come noto, forze e coppie.

Nella maggior parte delle applicazioni delle macchine elettriche, la conversione elettromeccanica si realizza sfruttando un campo magnetico. Ciò si spiega con il fatto che la *pressione magnetica* è enormemente più elevata della *pressione elettrostatica*, considerando i valori che l'induzione magnetica e il campo elettrico possono assumere in aria nella pratica corrente (si fa riferimento ai valori in aria in quanto nei sistemi di conversione elettromeccanica le diverse parti in movimento sono generalmente separate da sottili spazi d'aria). Si comprende che elevate pressioni consentono di realizzare più elevate forze o coppie a parità di dimensioni delle parti affacciate.

Si può effettuare un confronto tra la pressione sulla superficie di un traferro in un circuito magnetico e la pressione sulle armature di un condensatore piano in aria. Nel primo caso, assumendo un'induzione magnetica  $B$  nel traferro pari al valore tipico per i sistemi elettromeccanici di 1T si ottiene

$$p = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cong 4 \cdot 10^5 \quad N/m^2$$

Nel secondo caso, assumendo un campo elettrico  $K$  di 10.000 V/cm, compatibile ma non molto minore della rigidità dielettrica dell'aria, si trova invece

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 \cong 4 \quad N/m^2$$

In conseguenza del grande rapporto dei due valori, le dimensioni di un sistema elettromagnetico di conversione elettromeccanica sono, a parità di forza o coppia prodotta, enormemente più piccole di quelle di un sistema elettrostatico.

Nei motori idraulici o endotermici si hanno pressioni fino a 100 Kg/cm<sup>2</sup> (o più) corrispondenti a 10<sup>7</sup> N/m<sup>2</sup>, consentendo per essi dimensioni (della camera ove si sviluppa l'azione motrice) ancor più

piccole di quelle dell'equivalente motore elettrico. Naturalmente, nel valutare gli ingombri globali, occorre considerare che, per esempio, i motori endotermici richiedono per il loro funzionamento molti altri componenti, per cui le dimensioni della camera di scoppio finiscono per essere solo una piccola parte del totale.

Nel seguito di questa trattazione si farà riferimento alle sole macchine elettriche in cui la conversione elettromeccanica sia attuata attraverso un campo magnetico.

## 2.1. Bilancio energetico della conversione elettromeccanica

La conversione elettromeccanica dell'energia segue delle leggi generali delle quali se ne vuole qui dare un semplice richiamo riferendosi a sistemi elettromagnetici conservativi<sup>1</sup> per i quali si assume quindi, in particolare, che tutti i circuiti in ferro presenti siano privi di perdite per isteresi e per correnti parassite.

Per comodità, si faccia riferimento alla Fig. 2.1 che mostra un sistema elettromagnetico con un elemento mobile interno (rotore), libero di ruotare.

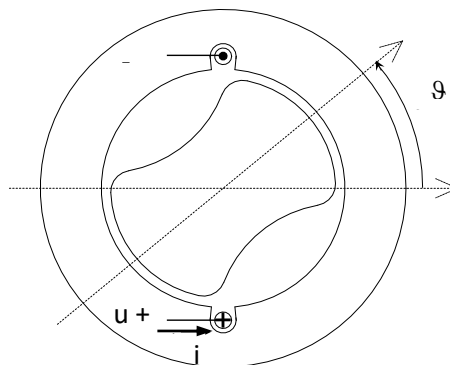


Fig. 2.1 – Esempio di sistema elettromeccanico

La tensione  $u$  applicata istante per istante ai morsetti dell'avvolgimento percorso dalla corrente istantanea  $i$  dovrà vincere la caduta resistiva  $Ri$  e la forza contro elettromotrice legata alla derivata temporale del flusso concatenato  $\lambda$ ; vale cioè, con la *convenzione di segno degli utilizzatori*:

<sup>1</sup> Si intende con ciò riferirsi a sistemi elettromagnetici capaci di uno scambio reversibile di energia, ovvero per i quali il lavoro netto assorbito (lavoro elettrico assorbito meno lavoro meccanico erogato) coincida con un'energia accumulata (nel caso specifico: l'energia magnetica).

$$u = Ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.1)$$

Si comprende che le variazioni di flusso concatenato  $d\lambda$  possano essere dovute sia a variazioni della corrente del circuito che a spostamenti dell'elemento mobile, la cui posizione  $\vartheta$  influenza il valore della riluttanza del circuito magnetico.

A partire dalla (2.1) si può formulare il bilancio degli scambi energetici che avvengono nel sistema di Fig.2.1 nell'intervallo  $dt$ . Allo scopo si moltiplichino entrambi i membri della (2.1) per il valore istantaneo della corrente  $i$ , ottenendo così il bilancio della potenza istantanea. Moltiplicando ancora per  $dt$  si ottiene il bilancio degli scambi infinitesimi di energia che avvengono nell'intervallo  $dt$ :

$$u i dt = Ri^2 dt + i d\lambda \quad (2.2)$$

Il primo membro rappresenta il lavoro elettrico assorbito (perché si è usata la convenzione di segno degli utilizzatori) nel tempo  $dt$  ai morsetti del circuito e fornito dalla sorgente di alimentazione esterna. Il primo termine a secondo membro è l'energia dissipata nello stesso intervallo di tempo per effetto Joule. Avendo escluso la presenza di altre perdite, il secondo termine a secondo membro rappresenta la somma della variazione di energia magnetica  $dw_m$  immagazzinata nel circuito magnetico e del lavoro meccanico infinitesimo sviluppato; quest'ultimo è compiuto sull'elemento rotante, in corrispondenza ad ogni spostamento  $d\vartheta$ , dalla coppia  $m$  che vi agisce.

Assumendo positiva la coppia generata quando agisce nel verso delle  $\vartheta$  crescenti (*convenzione di segno dei motori*), il secondo termine a secondo membro della 2.2 si può scrivere come:

$$i d\lambda = dw_m + m d\vartheta \quad (2.3)$$

L'energia è una *funzione di stato*, cioè essa dipende, istante per istante, dai valori in quell'istante delle variabili  $i$ ,  $\lambda$  e  $\vartheta$ , senza che abbia alcuna rilevanza la storia passata che ha portato a tali valori e il loro andamento attuale (cioè che abbiano per esempio derivata nulla o meno). Per ogni posizione  $\vartheta$  dell'elemento mobile, si può inoltre ammettere l'esistenza di una relazione biunivoca fra la corrente  $i$  e il flusso concatenato  $\lambda$  (*curva di magnetizzazione*  $\lambda(i, \vartheta)$ ) sicché l'energia può essere di fatto espressa per esempio in funzione di  $i$  e  $\vartheta$  oppure di  $\lambda$  e  $\vartheta$ , che assumono il ruolo di *variabili di stato* del sistema in esame. La scelta della coppia di variabili di stato da impiegare è una questione di sola convenienza, essendo entrambe le combinazioni appena elencate ugualmente lecite.

Volendo sfruttare la (2.3) per ricavare la coppia in funzione di  $\lambda$  e  $\vartheta$ , conviene esprimere l'energia in funzione delle stesse variabili:  $w_m(\lambda, \vartheta)$ . Il termine differenziale dell'energia immagazzinata si può esprimere allora come

$$dw_m = \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.4)$$

Il bilancio energetico (2.3), che esprime il principio della conservazione dell'energia, valido per qualunque evoluzione del sistema, libera o imposta, può essere riscritto tenendo conto della (2.4) e riordinato per ottenere:

$$i d\lambda - m d\vartheta = \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.5)$$

L'uguaglianza (2.5) deve valere per ogni coppia di valori dei differenziali  $d\lambda$  e  $d\vartheta$  ed essendo le due variabili  $\lambda$  e  $\vartheta$  indipendenti, ne risulta che i coefficienti dei termini differenziali  $d\lambda$  e  $d\vartheta$  a primo e secondo membro della (2.5) devono coincidere; da questo si ricava l'espressione cercata della coppia:

$$m(\lambda, \vartheta) = - \frac{\partial w_m(\lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (2.6)$$

La (2.6) evidenzia come la coppia sia pari al rapporto cambiato di segno fra la variazione di energia *dovuta al solo spostamento* e lo spostamento stesso. L'eventuale ulteriore variazione di energia associata alle variazioni di  $\lambda$  (quasi sempre presenti in pratica) non va dunque conteggiata.

Si riconosce dalla (2.5) che l'altra derivata parziale è pari alla corrente circolante nell'avvolgimento.

E' pure possibile esprimere la coppia in funzione di  $i$  e  $\vartheta$ , sostituendo nella  $m(\lambda, \vartheta)$  l'espressione  $\lambda(i, \vartheta)$  della curva di magnetizzazione. In alternativa, al posto dell'energia si può utilizzare la funzione di stato *coenergia*  $w'_m(i, \vartheta)$ , definita come

$$w'_m(i, \vartheta) = i\lambda - w_m(\lambda, \vartheta) \quad (2.7)$$

Differenziando la (2.7) e sostituendo l'espressione del differenziale dell'energia ricavato dalla (2.3) si perviene alla

$$dw'_m(i, \vartheta) = \lambda di + m d\vartheta \quad (2.8)$$

che è corrispondente alla (2.3). Con procedimento del tutto analogo a quello che ha portato alla (2.6), attraverso le (2.5), si ottiene in questo caso dalla (2.8)

$$\lambda di + md\vartheta = \frac{\partial w'_m(i,\vartheta)}{\partial i} di + \frac{\partial w'_m(i,\vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.9)$$

che porta a scrivere

$$m = \frac{\partial w'_m(i,\vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (2.10)$$

Si riconosce in questo caso dalla (2.9) che l'altra derivata parziale della coenergia è pari al flusso concatenato con l'avvolgimento.

In conclusione di queste note si possono fissare alcuni punti; si rimanda ai testi specialistici di Elettrotecnica e Conversione Elettromeccanica per un loro approfondimento.

- La sola ipotesi su cui si basa la trattazione è che il sistema elettromeccanico sia conservativo. Esso può anche essere non lineare cioè avere un legame non lineare fra il flusso concatenato e la corrente.
- Le espressioni trovate sono applicabili a sistemi anche diversi e più complessi di quello di Fig. 2.1, utilizzato solo come ausilio per l'impostazione della trattazione.
- In particolare si possono avere anche sistemi con più circuiti, eventualmente accoppiati fra di loro. In tal caso valgono ancora le (2.6) e (2.9) ove la coenergia è definita ancora dalla (2.7) sostituendo il prodotto  $i\lambda$  con la sommatoria degli stessi prodotti estesa a tutti i circuiti.
- Nel caso in cui il sistema, oltre che conservativo, sia anche *lineare*, si può dimostrare che energia e coenergia si uguagliano e quindi vale pure:

$$m = \frac{\partial w_m(i,\vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (2.11)$$

Le (2.6) e (2.9) sono equazioni fondamentali della conversione elettromeccanica dell'energia. Attraverso di esse, nei paragrafi che seguono, si illustreranno le tre principali modalità secondo le quali si esplica la conversione elettromeccanica nelle macchine elettriche rotanti di comune impiego.



## 2.2. Sistemi a riluttanza variabile

Un esempio di sistema a riluttanza variabile per la conversione elettromeccanica dell'energia è quello schematizzato in Fig. 2.1, per il quale si assume qui per semplicità l'ipotesi di linearità del circuito magnetico, ossia di assenza di saturazione del ferro. Variando la posizione  $\vartheta$  dell'elemento mobile ne viene modificata la riluttanza del circuito magnetico eccitato dalla corrente  $i$ , che sarà minima per  $\vartheta = \pm\pi/2$ , mentre assumerà il suo massimo valore per  $\vartheta=0$  e per  $\vartheta=\pi$ . Le variazioni di riluttanza producono corrispondenti e opposte variazioni del coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento, il cui andamento  $l(\vartheta)$  può essere approssimato analiticamente dalla relazione

$$l(\vartheta) = L_0 - L_2 \cos(2\vartheta) \quad (2.12)$$

dove  $L_0$  è il valore medio dell'induttanza, a cui si sovrappone una variazione cosinusoidale di ampiezza  $L_2$ . Sfruttando la (2.12) e ricordando l'ipotesi semplificativa di linearità magnetica, l'energia magnetica  $w_m(i, \vartheta)$  si valuta agevolmente con la:

$$w_m(i, \vartheta) = \frac{1}{2} l(\vartheta) i^2 = \frac{1}{2} (L_0 - L_2 \cos(2\vartheta)) i^2 \quad (2.13)$$

Dalla (2.13) si comprende anche che l'andamento dell'energia magnetica in funzione della posizione  $\vartheta$  dell'elemento mobile, per ogni prefissato valore di corrente, è del tutto simile a quello dell'induttanza.

A seguito di piccole variazioni della posizione, non si hanno perciò variazioni di energia quando quest'ultima assume i suoi valori massimi o minimi: secondo la (2.11) la coppia sviluppata in questi punti sarà nulla. Si ha invece la derivata massima dell'energia in corrispondenza dei passaggi per il suo valore medio e ivi la coppia assumerà le sue più elevate ampiezze. Per valutare la coppia che agisce sull'elemento mobile si può applicare la (2.11) alla (2.13) ottenendo:

$$m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dl(\vartheta)}{d\vartheta} = i^2 L_2 \sin(2\vartheta) \quad (2.14)$$

La coppia è nulla per  $\vartheta=0$  e per ogni posizione multipla di  $\pi/2$ ; è positiva per valori della posizione compresi fra 0 e  $\pi/2$  e successivamente negativa fino a  $\pi$  per poi ripetersi ciclicamente. Con l'elemento mobile nella posizione di Fig. 2.1 si manifesta pertanto una coppia positiva, cioè tale da far ruotare l'elemento stesso nel senso antiorario; l'elemento mobile raggiungerà la posizione stabile  $\vartheta=\pi/2$ , ove la coppia è nulla e l'autoinduttanza massima.

La (2.14) mette in evidenza un aspetto molto importante dei sistemi a riluttanza variabile, ovvero che la coppia non dipende dal segno della corrente ma solo dal valore della sua ampiezza, dalla quale la coppia dipende con legge quadratica.

Il principio appena illustrato è impiegato, per esempio, nei *motori a passo a riluttanza variabile*. Per ottenere una macchina rotante, capace di un movimento continuativo, la parte fissa di Fig.2.1, su cui è posto l'avvolgimento interessato dalla corrente  $i$ , è ripetuta numerose volte, in posizioni spazialmente sfasate, e le diverse parti (fasi) sono alimentate in successione.

Il medesimo principio è applicato anche nelle *macchine sincrone a riluttanza*. Nella versione trifase, la stessa parte fissa è sostituita da una corona cilindrica ferromagnetica (statore) in cui trovano posto tre avvolgimenti con uguale sfasamento spaziale reciproco e percorsi da un sistema trifase di correnti alternate. Come è noto ciò produce un campo magnetico rotante il cui effetto si può immaginare equivalente a quello che si ottiene facendo ruotare la parte fissa della struttura di Fig. 2.1. Se l'elemento mobile assume una velocità angolare uguale a quella del campo magnetico rotante, l'angolo  $\vartheta$  rimane costante e con esso la coppia, che ne sosterrà la rotazione.

In presenza di velocità si potrà anche parlare di *potenza meccanica*, pari al prodotto della coppia per la velocità. Con coppie positive essa sarà fornita dall'avvolgimento, o dagli avvolgimenti, posti sulla parte fissa all'elemento mobile rotante per mantenerlo in moto.

### 2.3. Sistemi elettrodinamici

Nel tracciare il bilancio della conversione elettromeccanica, nel par. 2.1, si è analizzato il caso semplice in cui il sistema magnetico sia costituito da un solo avvolgimento e dunque intervenga una sola corrente. Come anticipato, la metodologia, le considerazioni generali e le espressioni (2.6) e (2.11), che da queste discendono, rimangono comunque valide anche nel caso più generale di un sistema elettromagnetico formato da più avvolgimenti.

In questo paragrafo si considera una particolare topologia, schematizzata in Fig. 2.2, alla quale si possono ricondurre importanti classi di macchine elettriche dinamiche. Tale figura rappresenta un sistema elettrodinamico a due avvolgimenti, 1 e 2, mutuamente accoppiati e percorsi da due correnti  $i_1$  e  $i_2$ , sostenute dai due generatori di tensione  $u_1$  e  $u_2$ . Ancora si supporrà lineare, per semplicità, il circuito magnetico.

Cambiando la posizione  $\vartheta$  dell'avvolgimento 2 rispetto a 1, ne risulterà modificato il coefficiente di mutuo accoppiamento  $l_M(\vartheta)$ : esso sarà massimo positivo ( $L_M$ ) per  $\vartheta=0$ , assumerà il suo valore di picco negativo  $-L_M$  per  $\vartheta=\pi$ , mentre sarà nullo per  $\vartheta= \pm\pi/2$ . In prima approssimazione si potrà allora scrivere

$$l_M(\vartheta) = L_M \cos(\vartheta) \quad (2.15)$$

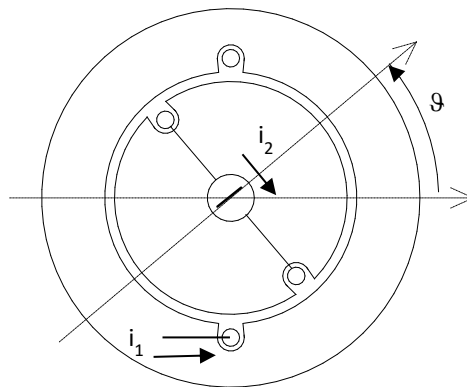


Fig. 2.2 – Esempio di sistema elettrodinamico

Data la struttura isotropa della parte mobile, i coefficienti di autoinduzione  $L_1$  e  $L_2$  si possono invece ritenere sostanzialmente costanti con  $\vartheta$ . L'energia magnetica totale del sistema, tenendo conto delle interazioni tra gli avvolgimenti e dell'assunta linearità magnetica, si esprime con la:

$$w_m(i_1, i_2, \vartheta) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + l_M(\vartheta)i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + L_M \cos(\vartheta)i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \quad (2.16)$$

Si può infine applicare la (2.11) per valutare la coppia che agisce sul circuito 2, quindi sul rotore (e, di segno contrario anche sullo statore):

$$m = \frac{\partial w_m(i, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -L_M i_1 i_2 \sin(\vartheta) \quad (2.17)$$

Con due correnti costanti e positive e una posizione dell'elemento mobile tra  $-\pi$  e  $0$ , come in Fig. 2.2 si ha quindi una coppia positiva, cioè tale da tendere a ruotare il rotore nel senso delle posizioni crescenti. Se la coppia è sufficiente a vincere la resistenza al movimento, il rotore raggiungerà la posizione stabile  $\vartheta=0$ , ove la coppia è nulla e la mutua induttanza massima.

Il principio appena illustrato è impiegato per esempio, nelle *macchine sincrone*. Anche in questo caso, come per le macchine a riluttanza, l'avvolgimento 1, percorso da corrente continua, è sostituito con un avvolgimento trifase capace di produrre un campo magnetico rotante. Se il circuito 2, alimentato attraverso contatti striscianti, assume una velocità angolare uguale a quella del campo magnetico rotante, l'angolo  $\vartheta$  rimane costante, come la coppia.

In presenza di velocità si potrà anche qui parlare di *potenza meccanica*, che sarà fornita dal circuito 1 alla struttura mobile per mantenerla in rotazione. Se tuttavia un agente esterno forza la rotazione della parte mobile così da far assumere alla posizione  $\vartheta$  un valore positivo, la coppia inverte il suo

segno (diventa cioè frenante) e con essa anche la potenza. In tal caso si ha quindi una conversione elettromeccanica da lavoro meccanico a lavoro elettrico.

Anche le *macchine a corrente continua* sfruttano essenzialmente questo principio per eseguire la conversione elettromeccanica. In virtù di un loro peculiare componente, che è il commutatore a lamelle, la conversione elettromeccanica nelle macchine rotanti in corrente continua si esplica però senza che alcun campo magnetico sia in rotazione, bensì predisponendo un certo numero di avvolgimenti equivalenti di tipo 2, sfasati tra loro ed alimentati in successione in modo che, nonostante il moto della parte mobile, venga alimentato sempre l'avvolgimento che ha la giusta posizione spaziale rispetto alla parte fissa, cioè con  $\vartheta = -\pi/2$ .

## 2.4. Sistemi a induzione

Un sistema a induzione per la conversione elettromeccanica è illustrato in Fig. 2.3. Esso differisce da quello di Fig. 2.2 per il fatto che l'avvolgimento 2 sulla parte mobile non è alimentato, bensì è posto in corto circuito; si mantiene ancora, per semplicità, l'ipotesi di linearità. Anche questa topologia è di grande importanza nello studio degli azionamenti elettrici, in quanto ad essa si può ricondurre la classe delle *macchine elettriche ad induzione* (o *asincrone*), di enorme rilevanza teorica e pratica.

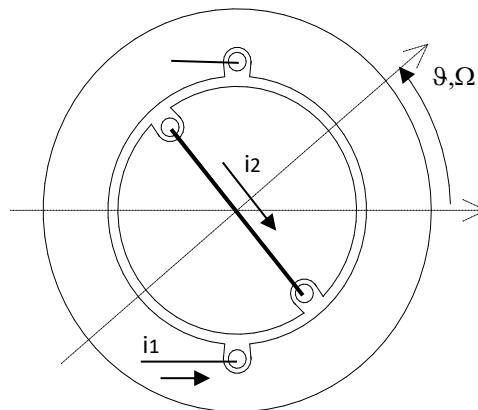


Fig. 2.3 – Esempio di sistema elettromeccanico ad induzione

Si immagini che, mentre la corrente  $i_1$  è mantenuta costante, l'elemento mobile sia in rotazione alla velocità fissa  $\Omega$  sicché  $\vartheta = \Omega t$ . Conseguentemente è variabile nel tempo il flusso concatenato dal circuito 2, il quale diventa sede di una fem che si valuta con la

$$e_2 = -\frac{d\lambda_2}{dt} = M_0 i_1 \Omega \sin(\Omega t) - L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2.18)$$

ove  $i_2$  è la corrente sostenuta dalla fem  $e_2$ .

Dato che l'avvolgimento secondario è in cortocircuito, la fem indotta deve vincere la sola caduta resistiva  $R_2 i_2$ ; l'equazione di maglia porge quindi  $R_2 i_2 = e_2$  ossia per la (2.18)

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = M_0 i_1 \Omega \sin(\Omega t) \quad (2.19)$$

che nelle ipotesi poste è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Se  $Z$  e  $\phi$  sono rispettivamente il modulo e l'argomento dell'impedenza del circuito mobile nel regime sinusoidale alla pulsazione  $\Omega$ , (che ha quindi resistenza  $R_2$  e reattanza  $\Omega L_2$ ), la corrente in regime sinusoidale<sup>2</sup> che in esso si instaura per effetto della fem risulta

$$i_2(t) = \frac{L_M i_1 \Omega}{Z} \sin(\Omega t - \phi) \quad (2.20)$$

La situazione è così analoga a quella di un sistema elettrodinamico (par. 2.3) per cui, applicando la (2.17), si ottiene l'espressione della coppia in regime sinusoidale:

$$m = -\frac{L_M^2 i_1^2 \Omega}{Z} \sin(\Omega t) \sin(\Omega t - \phi) = -\frac{L_M^2 i_1^2 \Omega}{2Z} \cos\phi + \frac{L_M^2 i_1^2 \Omega}{2Z} \cos(2\Omega t - \phi) \quad (2.21)$$

Dalla (2.21) si possono trarre alcune interessanti considerazioni:

- Innanzitutto, la coppia contiene un termine costante nel tempo (se tale è la corrente  $i_1$ ), al quale si sovrappone un secondo termine alternativo a pulsazione  $2\Omega$ . Quest'ultimo può essere eliminato disponendo sulla parte rotante più avvolgimenti indotti, spazialmente sfasati, uno rispetto all'altro, in modo uniforme. Per esempio, un secondo avvolgimento identico a quello di figura ma collocato ortogonalmente a quest'ultimo sarebbe sottoposto ad una coppia la cui componente alternativa è in opposizione di fase rispetto a quella data dalla (2.21). La coppia totale sulla parte mobile risulterebbe pertanto costante.
- Un secondo aspetto significativo è che la coppia dipende dalla velocità e non dalla posizione del rotore. A velocità nulla la coppia è nulla non essendovi correnti indotte nel circuito 2. Per velocità

---

<sup>2</sup> La rimozione di queste ipotesi complicherebbe solo la trattazione matematica, senza nulla aggiungere alle considerazioni che verranno svolte nel seguito.

positive la coppia è negativa e viceversa, ossia la coppia tende ad opporsi al moto di rotazione della parte mobile rispetto ai poli induttori di quella fissa. Il valore assoluto della coppia inizialmente cresce con la velocità. Ma con questa aumenta anche la frequenza della fem indotta e quindi il modulo e l'argomento dell'impedenza del circuito 2. Oltre un certo valore di velocità si potrà pertanto manifestare un decremento della coppia.

Il principio illustrato è impiegato, per esempio, nelle macchine asincrone, per questo dette anche macchine a induzione. Ancora una volta, per ottenere la macchina rotante, si sostituisce la struttura fissa di Fig.I.6.1 con un campo magnetico rotante. L'azione della coppia, tendente ad evitare il movimento relativo del circuito 2 rispetto ai poli induttori del campo rotante, trascinerà in rotazione la parte mobile. Se tuttavia c'è una qualche resistenza al moto, la velocità di rotazione dell'elemento mobile sarà inferiore a quella del campo rotante, cosicché si viene a manifestare fra i due una velocità relativa diversa da zero (*velocità di scorrimento*). È da quest'ultima che dipende la coppia che agisce sul circuito 2, secondo il principio sopra descritto.

### 3. Azionamento elettrico

Si definisce *azionamento* un sistema capace di produrre e controllare il moto di un organo meccanico (carico meccanico). Le grandezze del carico meccanico che si controllano possono essere sia statiche (posizione) che cinematiche (velocità) che dinamiche (accelerazione, coppia o forza).

Ogni azionamento comprende un organo di potenza, detto *attuatore* capace di produrre il lavoro meccanico connesso al moto. Tale attuatore può essere idraulico, pneumatico o elettrico o di altro tipo.

Si definisce *azionamento elettrico* un azionamento che fa uso di un attuatore elettrico, ossia di una macchina elettrica, solitamente in funzionamento da motore, nella quale avviene una conversione di energia da elettrica a meccanica (conversione elettromeccanica di energia).

Il controllo del moto si attua attraverso le grandezze di alimentazione del motore (tensioni, correnti, frequenza). Allo scopo fra il motore e la sorgente di alimentazione dell'energia elettrica (come per esempio la rete pubblica di distribuzione dell'energia elettrica) è interposto un dispositivo di potenza capace di fornire al motore le desiderate ampiezze della tensione, corrente e frequenza. Escludendo le soluzioni con convertitori rotanti, tale dispositivo sarà in generale un *convertitore statico* costituito da una struttura elettronica di potenza che impiega componenti elettronici di potenza quali diodi, tiristori, transistori ecc e da un eventuale trasformatore (per adeguare il livello di tensione e/o il numero di fasi).

Lo schema di principio di un generico azionamento elettrico è mostrato in Fig. 3.1.

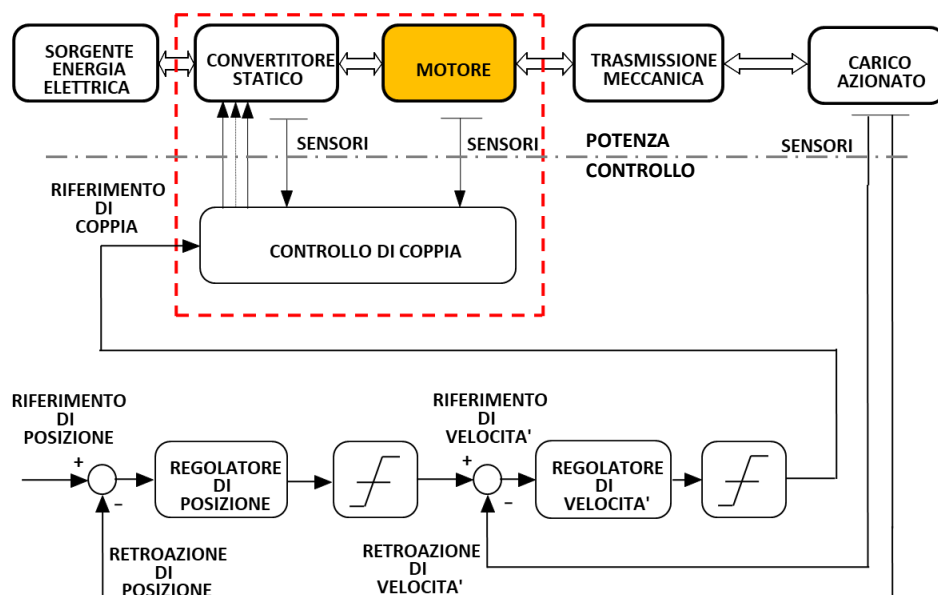


Fig. 3.1 - Azionamento elettrico con controllo a catena chiusa di posizione e velocità.

Nel caso illustrato si ha un controllo a catena chiusa sia della posizione che della velocità (non sempre entrambi presenti) oltre ad un controllo di coppia. Gli anelli di controllo sono *annidati* (uno interno all'altro) a partire da quello di coppia più interno per finire con quello di posizione più esterno. È una soluzione molto comune, ma non l'unica possibile.

Sono possibili anche azionamenti a catena aperta secondo lo schema di Fig. 3.2.

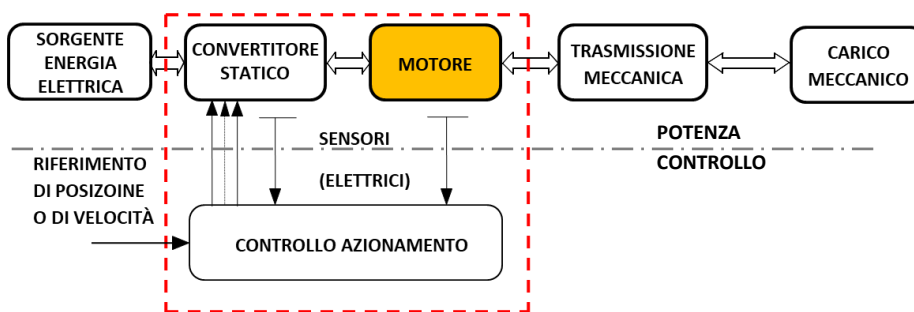


Fig. 3.2 - Azionamento elettrico a catena aperta

Questi azionamenti impiegano motori che hanno condizioni di lavoro (velocità, posizione) poco affette dalle caratteristiche del carico azionato (almeno entro certi limiti) e definibili unicamente dalle condizioni di alimentazione. Sono soluzioni in genere più economiche di quelle di Fig. 3.1, ma anche meno precise e con più scarse prestazioni dinamiche.

Sono rappresentati dalla Fig. 3.1 anche gli *azionamenti sensorless* cosiddetti perché privi (per esigenze tecnico-economiche) dei trasduttori elettromeccanici di velocità e di posizione, pur essendo la conoscenza di queste grandezze essenziale per il corretto funzionamento del loro controllo. Negli azionamenti sensorless le grandezze non misurate vengono calcolate o stimate con tecniche diverse a partire dalle sole grandezze elettriche facilmente misurabili. La complessità della soluzione adottata per ricostruire le grandezze non misurate determina le prestazioni dell'azionamento, che però in genere rimangono inferiori a quelle degli azionamenti di Fig. 3.1, come inferiore è anche il loro costo.

In entrambe le figure è evidenziata a tratteggio la parte più interna di ciascuna azionamento la cui struttura e principio di funzionamento si differenziano a seconda del tipo di motore impiegato (e a volte anche del convertitore). Essi saranno oggetto di altra Parti di queste note.

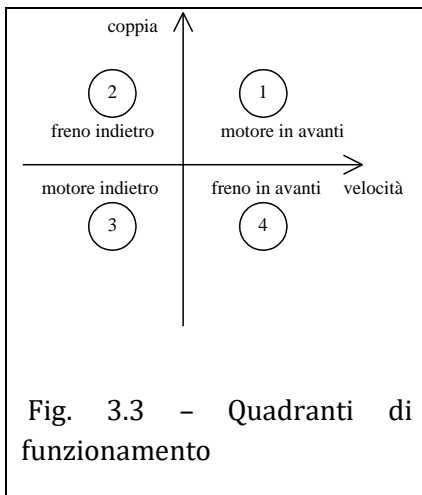
### 3.2 - Quadranti, limiti e regioni di funzionamento

Le prestazioni degli azionamenti al loro asse (prestazioni meccaniche) possono essere esaminate e classificate in differenti modi che portano a definire

- i quadranti di funzionamento e
- i limiti e le regioni di funzionamento.



**3.2.1 - Quadranti di funzionamento.** Gli azionamenti si possono classificare in base ai quadranti del piano velocità angolare-coppia nei quali sono in grado di operare, Fig. 3.3.



*La capacità di funzionamento in uno o più quadranti dipende dal tipo di motore e, specialmente, dal tipo di convertitore statico.* Si definiscono così gli azionamenti ad uno, due o quattro quadranti. Per una più precisa definizione si deve anche specificare se si fa riferimento al funzionamento in regime continuativo (come generalmente è, salvo avviso contrario) o a quello transitorio o intermittente e, inoltre, quando l'azionamento non sia a quattro quadranti, a quali di essi ci si riferisca.

Con la convenzione di segno dei motori, nel *primo quadrante* sia la velocità che la coppia motrice sono positive e positiva è anche la potenza meccanica erogata dal motore, che è il prodotto delle prime due grandezze. Per questa ragione il funzionamento nel primo quadrante è detto *funzionamento da motore in avanti*.

Nel *secondo quadrante* la coppia è ancora positiva, mentre la velocità è negativa, come la potenza meccanica erogata. Il motore esprime pertanto una coppia contraria al moto (coppia frenante), il moto essendo impresso dal carico meccanico che, per un funzionamento continuativo in questo quadrante, deve essere un carico attivo, cioè capace di produrre potenza meccanica. Quest'ultima è assorbita dal motore e, a parte le perdite nel motore stesso, restituita ai suoi morsetti elettrici, ove viene dissipata o trasferita alla rete di alimentazione a monte del convertitore (nel caso di *convertitori reversibili*). Con riferimento alle grandezze meccaniche, per il funzionamento in questo quadrante si usa la dizione di *funzionamento da freno indietro*. Facendo riferimento alle grandezze elettriche ai morsetti della macchina elettrica si parla anche di *funzionamento da generatore*.

Il funzionamento nel *terzo quadrante* vede sia la coppia che la velocità negative cosicché la potenza erogata, prodotto delle due, risulta ancora positiva come per il primo quadrante. Si parla pertanto in questo caso ancora di *funzionamento da motore indietro*.

Infine, nel *quarto quadrante*, copia e velocità sono ancora discordi come nel secondo, ma in questo caso è la coppia ad essere negativa, come la potenza meccanica erogata. Ci si riferisce al funzionamento in questo quadrante con il termine di *funzionamento da freno in avanti*. Dal punto di vista elettrico la macchina funziona ancora *da generatore* e si hanno condizioni operative analoghe a quelle del secondo quadrante.

A parità di tipologia di motore e convertitore, un azionamento capace di funzionare su più quadranti è in generale più costoso di uno che operi su un minor numero di quadranti. Il numero di quadranti di funzionamento di un azionamento destinato ad un dato carico sarà quindi commisurato alle esigenze del carico stesso. Alcuni esempi possono aiutare a capire quest'affermazione.

- È chiamato a funzionare solo nel primo quadrante un motore destinato a trascinare un ventilatore o una pompa. (assumendo, per ovvia semplicità, che la normale velocità di funzionamento sia quella definita positiva). Per tale applicazione è quindi sufficiente un azionamento ad un quadrante.

- Nel caso di un veicolo elettrico, si ha il funzionamento nel primo quadrante durante la marcia in piano o in salita, mentre durante la marcia in discesa o meglio durante la frenatura elettrica (cioè esercitata dai motori) il punto di funzionamento cade nel quarto quadrante (si inverte il senso della coppia, ma non della velocità). Servirà allora per questa applicazione un azionamento a due quadranti, con un solo verso di marcia. Molto spesso però un veicolo elettrico, per esempio un tram, deve poter funzionare indifferentemente in entrambi i versi di marcia. In questi casi si farà uso di un azionamento a quattro quadranti: durante un verso di marcia si utilizzano i quadranti primo e quarto, durante l'altro verso i quadranti terzo e secondo.
- L'azionamento per un montacarichi (o per un ascensore o una gru) deve essere in grado di funzionare in due sensi di marcia: uno per la salita (lo si assuma come verso positivo della velocità) e uno per la discesa. In entrambi i casi però la coppia sviluppata ha sempre lo stesso segno, dovendo in ogni caso sostenere il peso della cabina (o del carico sospeso) contrastando la forza di gravità. I quadranti nei quali l'azionamento deve poter operare sono pertanto il primo (durante la salita) e il secondo (durante la discesa).

**3.2.2 - Limiti e regioni di funzionamento.** Ogni azionamento elettrico è caratterizzato da determinati limiti delle grandezze coppia e velocità che esso sviluppa. La ragione di tali limiti è di natura fisica, legata alle massime sollecitazioni elettriche, termiche, meccaniche che l'azionamento (o qualche parte di esso) è in grado di sopportare. Queste limitazioni definiscono, nel piano velocità angolare-coppia, delle regioni di funzionamento entro le quali deve cadere il punto di lavoro dell'azionamento stesso. Tipologie diverse di azionamenti sono in genere caratterizzate da regioni di funzionamento con diverse caratteristiche in conseguenza alle diverse modalità e capacità di funzionamento dei loro componenti. Ciò sarà messo in evidenza in altre Parti di queste note, mentre qui si farà riferimento ad un azionamento tipico ideale.

La coppia sviluppata da un motore elettromagnetico è dovuta all'azione complessiva di forze elementari del tipo<sup>3</sup>

$$f = Bli \quad (3.1)$$

ove  $B$  è l'induzione magnetica che investe i conduttori percorsi dalla corrente  $i$  e  $l$  è la lunghezza di ciascun conduttore. Essendo quindi la coppia legata all'intensità della corrente elettrica nei circuiti del motore (e del convertitore), ragioni principalmente termiche limiteranno la coppia continuativa che un azionamento è in grado di erogare entro un valore che rappresenta la coppia nominale  $M_N$  dell'azionamento, come mostrato in Fig. 3.4 ove i limiti positivi e negativi sono assunti uguali. Si comprende che, quando possibile, per avere la maggior coppia generata con la massima corrente

---

<sup>3</sup> Per semplicità, in queste considerazioni intuitive, si suppongono verificate le condizioni di ortogonalità e uniformità dei campi magnetici e di corrente che consentono la scrittura della semplice eq. (3.1).

soportabile (*corrente nominale*), l'induzione magnetica  $B$ , o come più propriamente si dice il *carico magnetico* del motore sarà mantenuto al suo valore massimo.

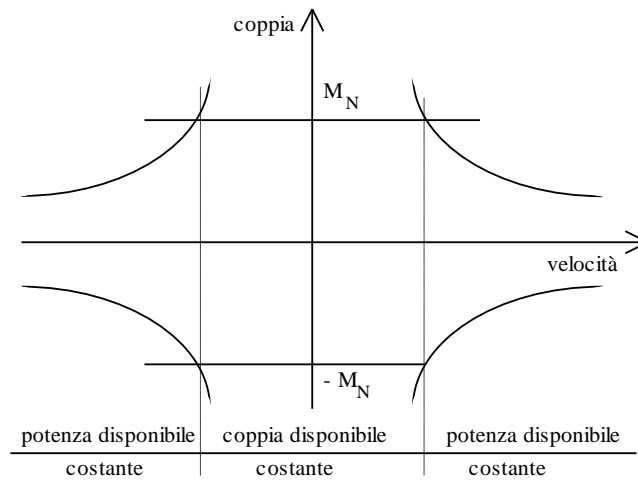


Fig. 3.4 Limiti e regioni di funzionamento

Per quanto riguarda la velocità, occorre ricordare che la tensione ai morsetti è con buona approssimazione pari alla f.e.m. indotta negli avvolgimenti la quale risulta dalla somma complessiva di f.e.m. elementari del tipo<sup>4</sup>

$$e = Blv \quad (3.2)$$

ove  $v$  è la velocità con cui i conduttori tagliano le linee di campo, proporzionale alla velocità angolare  $\omega$  del motore. Al crescere della velocità di rotazione si ha quindi un aumento della tensione ai morsetti fino al valore limite che il motore è in grado di sopportare o che il convertitore è in grado di erogare: *tensione nominale*. La velocità alla quale si manifesta la situazione citata definisce la *velocità base* dell'azionamento.

La regione di funzionamento nel piano velocità-coppia delimitata dalla coppia nominale e dalla velocità base prende il nome di *regione di funzionamento a coppia limite (o disponibile) costante* (qualche volta, per brevità, *regione a coppia costante*).

Il funzionamento al di sopra della velocità base (in valore assoluto) fino alla velocità massima imposta da vari fattori fra i quali senz'altro anche quelli meccanici, senza superare la tensione nominale è consentito solo riducendo il carico magnetico con legge inversamente proporzionale alla velocità, come si evince dalla (3.2). Di conseguenza essendo la corrente pur sempre limitata al suo valore nominale per le ragioni termiche citate, anche la coppia limite prodotta dal motore risulterà

<sup>4</sup> Come per l'eq. (3.1), si assumano le necessarie condizioni semplificative (v. nota 1).

decreocere in maniera (almeno)<sup>5</sup> inversamente proporzionale alla velocità (cfr. eq. (3.1)). Ciò è evidenziato in Fig. 3.2. E' facile convincersi che in condizioni limite si hanno per ogni velocità sia la tensione che la corrente nominali e quindi sempre la stessa potenza: *potenza nominale* (in alternata: *potenza apparente*).

La regione di funzionamento nel piano velocità-coppia delimitata dalla potenza nominale e che si estende dalla velocità base fino alla velocità massima (sia positive che negative) prende il nome di *regione di funzionamento a potenza limite (o disponibile) costante* (qualche volta, per brevità, *regione a potenza costante*).

Le considerazioni sopra esposte si riferiscono al funzionamento continuativo o comunque di durata molto maggiore delle costanti di tempo termiche che caratterizzano le diverse parti dell'azionamento. Per brevi intervalli di tempo (e tanto più quanto essi sono minori delle costanti di tempo termiche), l'azionamento può sopportare condizioni operative che eccedono i limiti appena definiti, specialmente per quanto riguarda il limite di corrente. Assieme alle regioni di funzionamento a coppia e potenza continuative disponibili costanti sopra descritte, possono quindi essere definite le stesse regioni per ogni funzionamento intermittente definito da un preciso rapporto fra tempo di funzionamento e tempo di riposo, il tutto rapportato alla costante di tempo termica del motore o del convertitore. A questo proposito occorre ricordare che mentre un motore può avere una costante di tempo termica dell'ordine di decine di minuti, un convertitore statico ha costanti di tempo notevolmente più brevi, dell'ordine dei secondi (qualche suo componente anche frazioni di secondo). Conseguenza di ciò è che quando si intende sfruttare la costante di tempo termica del motore per un funzionamento intermittente che eccede i valori nominali continuativi della sua corrente, il convertitore deve essere scelto con una adeguata corrente nominale continuativa superiore a quella del motore, spesso pari a quella massima prevista o quasi.

Si deve infine ricordare che, a prescindere da questioni termiche, esistono limiti non superabili, neanche transitoriamente, sia di coppia che di velocità di ogni azionamento dovuti per esempio alla capacità di commutazione del sistema collettore-spazzole del motore in corrente continua, alla smagnetizzazione degli eventuali magneti permanenti del motore, alle sollecitazioni meccaniche ed elettriche massime ammissibili ecc.

---

<sup>5</sup> Nel caso dei sistemi in corrente alternata si dovrebbe anche tener conto dello sfasamento fra la distribuzione delle correnti e quella della densità di flusso lungo la circonferenza del traferro.

## 4. Carichi meccanici

Ogni motore dovrà trascinare, oltre al carico meccanico vero e proprio, anche se stesso e gli organi di trasmissione meccanica interposti fra motore e carico. Si conviene quindi di intendere per *carico meccanico il complesso costituito dal motore, organi di trasmissione e carico meccanico vero e proprio*. La coppia che viene applicata ad esso è la *coppia generata* dal motore.

I carichi meccanici possono essere in generale distinti in due categorie:

- a) sistemi rigidi (sistemi a singola (una) massa)
- b) sistemi elastici (sistemi a due masse; sistemi a più masse)

Nel caso dei *sistemi rigidi* si intende che tutte le parti in movimento (motore, elementi della trasmissione, carico e suoi componenti) ruotano o traslano con velocità che sono rigorosamente proporzionali fra loro, anche durante i transitori.

Nel caso invece dei *sistemi elastici*, il sincronismo di cui sopra non è garantito e il rapporto fra le velocità di diversi componenti non è rigorosamente costante. Un caso tipico sono i *sistemi a due masse* nei quali una parte, in genere costituita dal motore e parte della trasmissione meccanica, è connessa all'altra parte (il resto del sistema meccanico) attraverso un *elemento (giunto) elastico* (per esempio una cinghia) che consente al rapporto delle velocità delle due parti di non essere rigorosamente costante, specialmente durante i transitori.

Qui di seguito si danno alcuni richiami su come si descrivono e si controllano i carichi meccanici, assumendo che il motore sia di tipo rotante<sup>6</sup>.

### 4.2 - Sistemi rigidi

L'espressione generale della coppia di carico  $m_L$ , che sarà uguale istante per istante a quella  $m$  generata dal motore, può essere scritta in funzione delle grandezze all'albero dello stesso: *posizione angolare*  $\vartheta$ , *velocità angolare*  $\dot{\vartheta} = \omega$  e *accelerazione angolare*  $\ddot{\vartheta} = \alpha$  con un'espressione del tipo<sup>7</sup>

$$m_L(\ddot{\vartheta}, \dot{\vartheta}, \vartheta, t) = m_L(\alpha, \omega, \vartheta, t) \quad (4.1)$$

La (4.1) sarà esaminata qui di seguito per alcune situazioni tipiche e semplici. Innanzitutto, si considera il caso in cui è ammesso scomporla in diversi contributi come segue:

$$m_L(\alpha, \omega, \vartheta, t) = m_\alpha(\alpha) + m_\omega(\omega) + m_\vartheta(\vartheta) + m_L(t) \quad (4.2)$$

<sup>6</sup> I concetti esposti sono peraltro validi anche per motori lineari

<sup>7</sup> Si assume la *convenzione di segno dei carichi*, secondo la quale un momento torcente positivo corrisponde ad un'azione nel senso delle velocità negative cioè ad un'azione frenante (coppia resistente).

i quali possono essere discussi separatamente.

**4.2.1 - Coppia inerziale** - Si tratta del primo contributo a secondo membro della (4.2). Nell'ipotesi che il sistema abbia *momento di inerzia costante* (non vi siano cioè deformazioni geometriche durante il moto, come per esempio l'estensione di un braccio robotico durante il movimento di rotazione), allora la coppia inerziale di un carico meccanico rigido potrà essere scritta come

$$m_{\alpha}(\alpha) = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} \quad (4.3)$$

ove  $J$  è il *momento di inerzia* equivalente (costante) del sistema riportato all'albero del motore. Se il primo e l'ultimo membro della (4.3) sono moltiplicati per la velocità di rotazione si ottiene:

$$m_{\alpha}(\alpha) \cdot \omega = J \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{d}{dt} e_c \quad (4.4)$$

che si interpreta affermando che la potenza connessa al termine inerziale della coppia di carico è impegnata per produrre variazioni, positive o negative, dell'energia cinetica  $e_c$ , data dall'espressione entro parentesi della (4.4). Da ciò si deduce che, considerata una certa velocità costante  $\omega = \Omega$  del motore, cui corrisponde un'energia cinetica  $e_c = \mathcal{E}_c$  dell'intero sistema in moto, ne risulta l'utile espressione per il calcolo del momento di inerzia riportato al motore:

$$J = \frac{2\mathcal{E}_c}{\Omega^2} \quad (4.5)$$

L'energia cinetica del sistema può essere espressa in funzione dei contributi dei singoli componenti in moto mediante l'espressione

$$\mathcal{E}_c = \sum_i \frac{1}{2} J_i \Omega_i^2 + \sum_j \frac{1}{2} M_j V_j^2 \quad (4.6)$$

ove  $J_i$  sono i momenti di inerzia dei componenti rotanti con velocità  $\Omega_i$  e  $M_j$  le masse di quelli traslanti con velocità  $V_j$ .

Detti rispettivamente  $k_i$  i rapporti fra  $\Omega_i/\Omega$  e  $\rho_j$  i rapporti  $V_j/\Omega$  (con  $\Omega$  velocità del motore), che sono costanti per l'ipotesi di rigidità del sistema meccanico, si ottiene infine

$$\mathcal{E}_c = \frac{\Omega^2}{2} (\sum_i J_i k_i^2 + \sum_j M_j \rho_j^2) \quad (4.7)$$

da cui per confronto con la (4.5) si ricava l'espressione generale del momento di inerzia

$$J = \sum_i J_i k_i^2 + \sum_j M_j \rho_j^2 \quad (4.8)$$

Esercizio. - Calcolare il momento di inerzia di un cilindro pieno omogeneo di densità specifica  $\gamma$ , di diametro  $D$ , lunghezza  $L$  e peso  $G$  [kgp], ruotante attorno al suo asse. Ripetere per il caso di un cilindro cavo in cui il peso  $G$  sia concentrato in una corona cilindrica di diametro esterno  $D$  e di spessore  $s$  piccolo rispetto a  $D$ .

Il problema può essere risolto applicando la (4.5). Per un cilindro pieno, integrando i contributi infinitesimi dell'energia cinetica associati alle corone cilindriche di spessore  $dr$ , vale:

$$\mathcal{E}_c = \int_0^{D/2} \frac{1}{2} [L\gamma(2\pi r)dr] (\omega r)^2$$

che porta a

$$J = \frac{1}{32} \pi \gamma L D^4 = \frac{M D^2}{8}$$

essendo  $M = \gamma(\pi D^2/4)L$ . In pratica, la massa  $M$  di un corpo espressa in Kg (chilogrammi massa) corrisponde numericamente (almeno sulla terra) al suo peso  $G$  espresso in Kg<sub>p</sub> (chilogrammi peso) per cui si trova spesso scritto<sup>8</sup>

$$J = \frac{G D^2}{8}$$

Nel caso invece del cilindro cavo si ottiene con lo stesso procedimento:

$$J = \frac{1}{4} \pi s \gamma L D^3 = \frac{G D^2}{4}$$

Esercizio. – Calcolare il momento di inerzia  $J$  equivalente visto dal motore per il sistema meccanico rigido di Fig. 4.1 ove un motore con momento di inerzia  $J_m$  trascina un carico con momento di inerzia  $J_L$  attraverso una coppia di ruote dentate di  $n_1$  e  $n_2$  denti rispettivamente e momenti di inerzia  $J_1$  e  $J_2$ .

$$[R: J = J_m + J_1 + J_2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + J_L \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2]$$

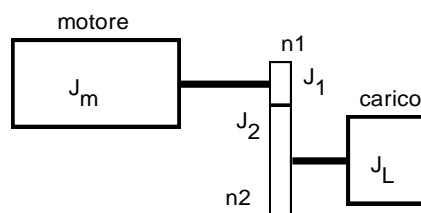


Fig. 4.1 – Trasmissione meccanica con ruote dentate

Esercizio. – Calcolare il momento di inerzia  $J$  equivalente visto dal motore per il sistema meccanico rigido di Fig. 4.2 ove un motore con momento di inerzia  $J_m$  solleva un peso di massa  $M$  mediante una fune che si avvolge su un rullo di diametro  $d_3$  azionato dal motore attraverso una coppia di pulegge di diametri  $d_1$  e  $d_2$  rispettivamente e momenti di

<sup>8</sup> Nella pratica corrente il peso è indicato solitamente con  $P$  (simbolo che in queste note è usato per la potenza) per cui l'inerzia di un cilindro pieno è scritta come  $J = P D^2 / 8$ .

inerzia  $J_1$  e  $J_2$ . Si assuma la cinghia di massa  $\mathcal{M}_c$  e priva di elasticità (così da poter assumere la condizione di carico rigido).

$$[R: J = J_m + J_1 + J_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 + M_c \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + M \left(\frac{d_1 d_3}{d_2}\right)^2]$$

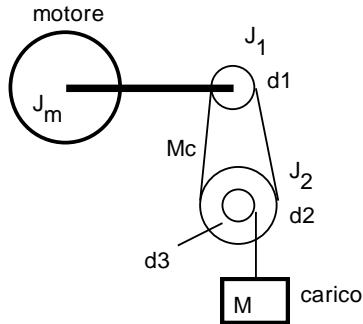


Fig. 4.2 – Trasmissione meccanica a cinghia

Esercizio. – Calcolare il momento di inerzia  $J$  equivalente visto dal motore per il sistema meccanico rigido di Fig. 4.3 ove un motore rotante di con momento di inerzia  $J_m$  movimenta un carrello di massa  $\mathcal{M}$  attraverso un sistema pignone-cremagliera. Si assuma per il pignone il momento di inerzia  $J_p$  e il diametro  $d_p$ , mentre la massa della cremagliera sia compresa in quella del carrello.

$$[R: J = J_m + J_p + M \left(\frac{d_p}{2}\right)^2]$$

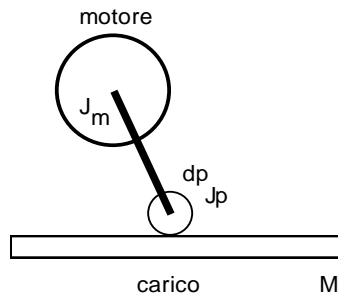


Fig. 4.3 – Sistema pignone-cremagliera

**4.2.2 – Coppia viscosa** - È il secondo contributo nella (4.2) e rappresenta la coppia resistente al moto dovuta ai movimenti rotanti e/o lineari del carico meccanico nel fluido in cui è immerso. Quest'ultimo può essere semplicemente l'aria ambiente, che nel caso dei ventilatori è intenzionalmente spostata, oppure può trattarsi di un liquido, come nelle pompe. Il legame della coppia viscosa risultante all'albero del motore con la velocità di rotazione dello stesso è spesso non lineare, potendo mostrare tipicamente una legge quadratica ed eventuali discontinuità all'inversione della velocità. Nel caso di una legge quadratica si scriverà:

$$m_\omega(\omega) = k_v |\omega| \omega = k_v \omega^2 \text{sign}(\omega) \tag{4.9}$$

Quando invece si possa approssimare con una relazione lineare si utilizzerà la scrittura:



$$m_{\omega}(\omega) = B\omega \quad (4.10)$$

che si presenta graficamente come in Fig. 4.4 a)

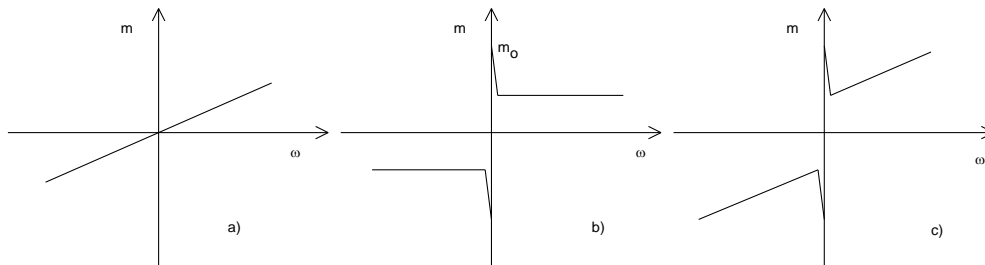


Fig. 4.4 Tipici casi di andamento della coppia viscosa

La presenza di discontinuità nell'origine è legata ai fenomeni di attrito radente (frizione) e statico (attrito di primo distacco) graficamente rappresentati in Fig. 4.4 b). In tali condizioni, assumendo per la coppia viscosa l'espressione lineare (4.10), la caratteristica meccanica risultante (relazione coppia-velocità) del carico risulta come nella Fig. 4.4 c), somma di quelle delle figure a) e b).

**4.2.3 - Coppia elastica (statica)** - Si tratta di un contributo della coppia di carico dipendente dalla posizione angolare dell'albero. Ciò accade per esempio nel caso di un braccio robotico che solleva un peso, schematicamente mostrato in Fig. 4.5 (a). Per esso vale

$$m_{\vartheta}(\vartheta) = Gr \sin \vartheta = Mgr \sin \vartheta \quad (4.11)$$

se con  $G$  si indica il peso, con  $\mathcal{M}$  la massa e con  $g$  l'accelerazione di gravità.

Altra situazione esemplificativa è quella di un motore che aziona un compressore a pistoni: la coppia resistente, fortemente variabile, dipende dalla posizione del pistone nel cilindro e quindi dalla posizione angolare dell'albero a gomiti.

Infine, un'altra situazione notevole è quella di una molla che si carica con la posizione angolare, Fig. 4.5 (b). In questo caso si può assumere una relazione lineare fra coppia resistente e posizione angolare del tipo

$$m_{\vartheta}(\vartheta) = k_s \vartheta \quad (4.12)$$

ove  $k_s$  è la *costante di rigidità (stiffness)* della molla.



Fig. 4.5 – Coppia statica gravitazionale (a), coppia elastica di una molla (b)

**4.2.4 – Coppia di disturbo** - Si tratta dell'ultimo contributo  $m_L(t)$  a secondo membro della (4.2). E' un contributo indipendente dalle condizioni operative del carico (accelerazione, velocità, posizione), ma dovuto a cause autonome esterne.

Per un carico meccanico come quello fin qui descritto si può utilizzare la rappresentazione (schema) a blocchi di Fig. 4.6 ove è messo in evidenza la possibilità dei contributi non lineari nella coppia viscosa (*blocco con doppia cornice*), mentre si è assunta una relazione lineare elastica posizione-coppia. Il contributo lineare della coppia viscosa è spesso trattato unitamente alla coppia inerziale; la combinazione di questi due soli contributi porta alla relazione

$$m = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \tag{4.13}$$

che può essere rappresentata con uno dei blocchi di Fig. 4.6 b) ove si è definito il rapporto:

$$\tau_m = \frac{J}{B} \tag{4.14}$$

che prende il nome di *costante di tempo meccanica*.

Il comportamento dinamico del blocco di Fig. 4.6 b) si può visualizzare attraverso la sua *risposta in frequenza (diagramma di Bode)*. Essa immagina di sollecitare il blocco in esame (o, in generale, il sistema lineare) con un ingresso  $m(t)$  sinusoidale di ampiezza prefissata  $\hat{M}$  e frequenza angolare (pulsazione) generica  $\nu$  e riporta quindi in funzione di  $\nu$  l'ampiezza  $\hat{\omega}$  del segnale di uscita (che sarà pure sinusoidale per l'ipotesi di linearità del sistema) rapportata a quella dell'ingresso -*risposta in frequenza del modulo* - e il suo sfasamento -*risposta in frequenza della fase*.

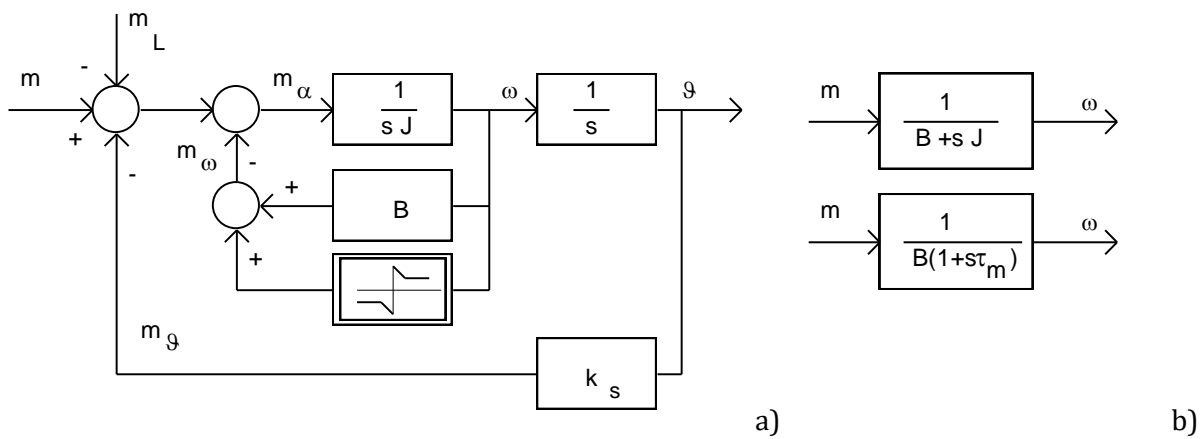


Fig. 4.6 – Schema a blocchi del carico meccanico con descrizione nel dominio di s per i blocchi lineari.

Adottando per la frequenza angolare e per il modulo una scala logaritmica, la Teoria dei Controlli automatici<sup>9</sup> insegna a tracciare per il blocco di Fig. 4.6 b) la risposta in frequenza approssimata (asintotica per il modulo, costante a tratti per la fase) mostrata in Fig. 4.7, avendo assunto per  $\tau_m$  un valore esemplificativo attorno ai 50 ms (e quindi  $1/\tau_m = 20$ ). Si osservi che la scala del modulo è espressa in dB (decibel) che corrispondono al valore

$$\left. \frac{\hat{\Omega}}{\hat{M}} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\hat{\Omega}}{\hat{M}}$$

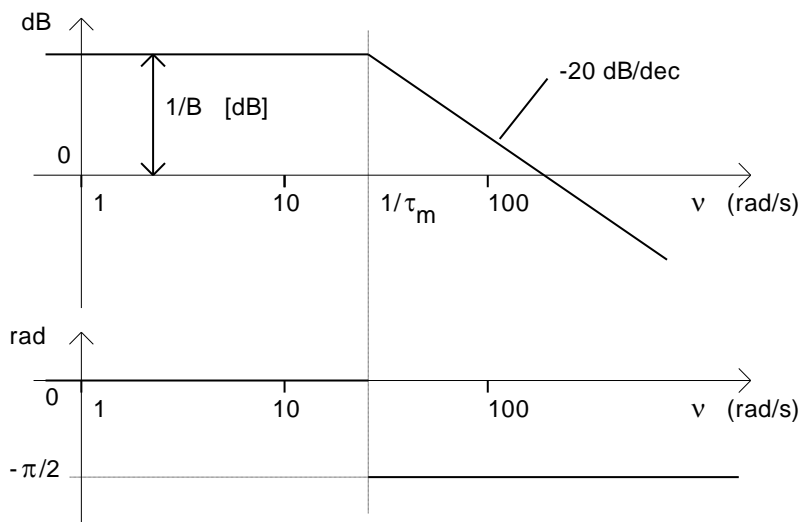


Fig. 4.7 – Risposta in frequenza di un carico meccanico visco-inerziale

Esercizio. - Trascurando il blocco non lineare (rappresentato in doppia cornice) in Fig. 4.6, calcolare la funzione di trasferimento complessiva fra il momento torcente applicato e la posizione angolare e tracciarne la risposta in frequenza.

<sup>9</sup> Si veda p.e. Di Stefano, Stubberud, Willimans, “Regolazione automatica”, Collana Schaum.

## 5. Controllo di velocità a catena chiusa di un carico rigido

Il *controllo di velocità* ha lo scopo di assicurare che il carico meccanico giri alla desiderata velocità nonostante il manifestarsi di possibili cause capaci di modificarla, come per esempio le variazioni degli attriti con la temperatura, l'applicazione di una coppia resistente ecc. Il controllo di velocità è attuato a *catena chiusa* quando la velocità di funzionamento del carico è *misurata* (*trasdotta*) e il segnale risultante è confrontato con un corrispondente *segnale di riferimento* che rappresenta la velocità desiderata. Sulla base della differenza fra i due segnali (*errore di velocità*) si comandano automaticamente all'attuatore variazioni di coppia motrice tali da cancellare tale differenza in tempi e con modi che fanno parte delle specifiche del controllo.

In queste note ci si riferirà ovviamente al controllo di velocità realizzato con azionamenti elettrici; le variazioni di coppia dei loro motori elettrici si ottengono attraverso un aggiustamento delle condizioni di alimentazione imposte dal convertitore statico. Si assumerà inoltre che il carico sia ad una sola massa per cui la velocità cui si farà riferimento sarà quella del motore. Una rappresentazione della struttura di un controllo di velocità con azionamento elettrico è mostrata in Fig. 5.1 a).

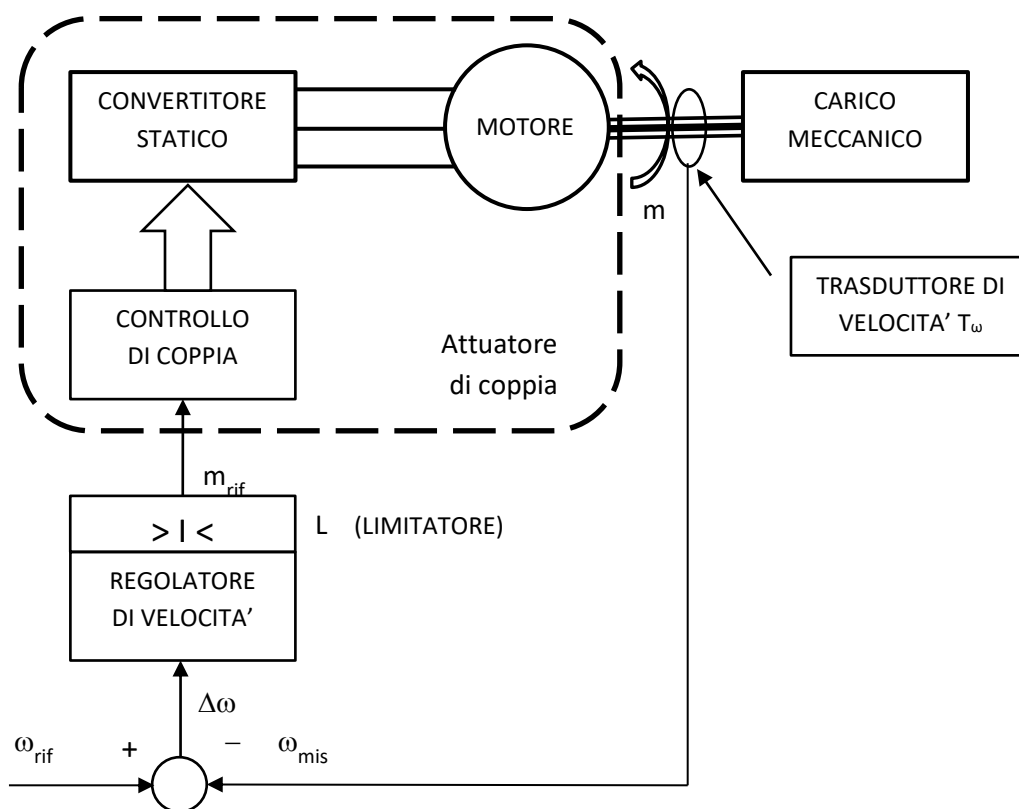


Fig. 5.1 a)- Rappresentazione di un azionamenti di velocità a catena chiusa

In termini schematici, alla struttura di Fig. 5.1 a) corrisponde lo schema a blocchi del controllo a catena chiusa della velocità mostrato in Fig. 5.1 b), assumendo per il carico l'assenza di una coppia resistente dipendente dalla posizione (cfr Fig. 4.6 b) )

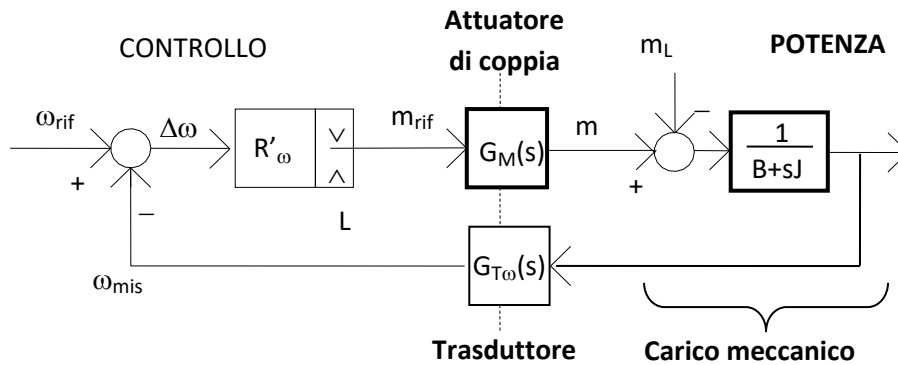


Fig. 5.1 b)- Schema di controllo di velocità a catena chiusa

Il segnale di ingresso è il riferimento di velocità  $\omega_{rif}$ , esso viene confrontato con il segnale di reazione  $\omega_{mis}$  che rappresenta la velocità vera del motore (e del carico). Il segnale di reazione è misurato dal trasduttore di velocità  $T_\omega$  che è rappresentato in Fig. 5.1 b) dal blocco con funzione di trasferimento  $G_{T\omega}(s)$ . La differenza fra il riferimento di velocità e il segnale di reazione costituisce l'errore (o segnale di errore) di velocità  $\Delta\omega$  che viene elaborato dal regolatore di velocità (o controllore)  $R'_\omega$  per produrre il riferimento di coppia  $m_{rif}$ . Quest'ultimo è l'ingresso (comando) dell'attuatore (azionamento) di coppia rappresentato dal blocco con fdt  $G_M(s)$ . La coppia  $m$  erogata dall'attuatore di coppia a seguito del comando  $m_{rif}$  viene applicata al carico producendo, assieme alla coppia di disturbo  $m_L$ , con la dinamica descritta dalla (4.11) (cfr. Fig. 4.7), la velocità  $\omega$ . Lo schema contiene anche il limitatore di riferimento di coppia  $L$  il cui scopo è quello di limitare adeguatamente i segnali di riferimento della coppia così da chiedere all'attuatore coppie compatibili con i limiti fisici del motore e del convertitore. Sui criteri di progetto di detto limitatore e sul coordinamento con il regolatore che lo precede nello schema si tornerà più avanti.

Per quanto riguarda l'attuatore (azionamento) di coppia, si fa qui l'assunzione che esso possa erogare coppie sia negative che positive e che la coppia erogata segua linearmente quella di ingresso con una dinamica definita da una funzione di trasferimento del primo ordine. Si assumerà pertanto la relazione in  $s$

$$G_M(s) = \frac{M(s)}{M_{rif}(s)} = \frac{K_M}{1+s\tau_M} \tag{5.1}$$

dove  $K_M$  è il guadagno statico (costante) dell'attuatore di coppia e  $\tau_M$  è la costante di tempo che definisce il ritardo con cui la coppia prodotta risponde ad ogni variazione del suo riferimento, secondo la fdt (5.1).

Per quanto riguarda il trasduttore di velocità, si potrà in genere assumere che la sua fdt  $G_{T\omega}(s)$  sia dello stesso tipo della  $G_M(s)$ , con un guadagno statico e (almeno) un polo a denominatore legato ad una costante di tempo  $\tau_{T\omega}$ .

In genere il valore di  $\tau_M$  va dal millisecondo a qualche decina millisecondi che è solitamente inferiore (spesso molto inferiore) della costante di tempo meccanica  $\tau_m$ . La costante di tempo del trasduttore  $\tau_{T\omega}$  è comparabile o più piccola di quella dell'attuatore di coppia e pertanto è spesso la minore di tutte le costanti di tempo presenti nello schema. Quando possa essere trascurata, la fdt  $G_{T\omega}(s)$  si riduce al suo solo guadagno statico  $K_M$ .

Queste ipotesi consentono di considerare lo schema della precedente Fig. 5.1 b) come lineare; esso quindi può essere ridisegnato come in Fig. 5.2 a).

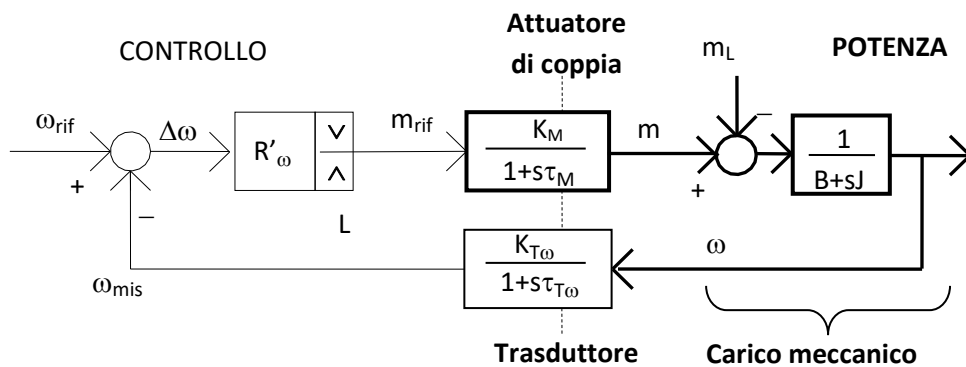


Fig. 5.2 a) - Schema di controllo di velocità a catena chiusa

Lo stesso schema si può convenientemente ridisegnare come in Fig. 5.2 b) ove i guadagni dell'attuatore di coppia e del trasduttore di velocità sono stati separati dalle relative fdt e integrati nel regolatore  $R'_\omega$  per costituire il regolatore risultante (equivalente)  $R_\omega$ . Il vantaggio di tale elaborazione sta nel fatto che così facendo sia l'attuatore che il trasduttore hanno guadagni (statici) unitari. I nuovi riferimenti di velocità  $\omega^*$  e di coppia  $m^*$  avranno pertanto valori numerici coincidenti con rispettivamente la velocità e la coppia desiderate. Anche il segnale di reazione di velocità  $\omega'$  differisce dalla velocità vera solo per gli effetti del ritardo di misura del trasduttore e nel caso di ritardo nullo ( $\tau_{T\omega}=0$ ) coincide proprio con la velocità (anello di controllo a retroazione unitaria).

Il problema del progetto del controllo di velocità consiste nel dimensionare il regolatore  $R_\omega$  in modo da soddisfare un certo numero di specifiche fra le quali possono esserci:

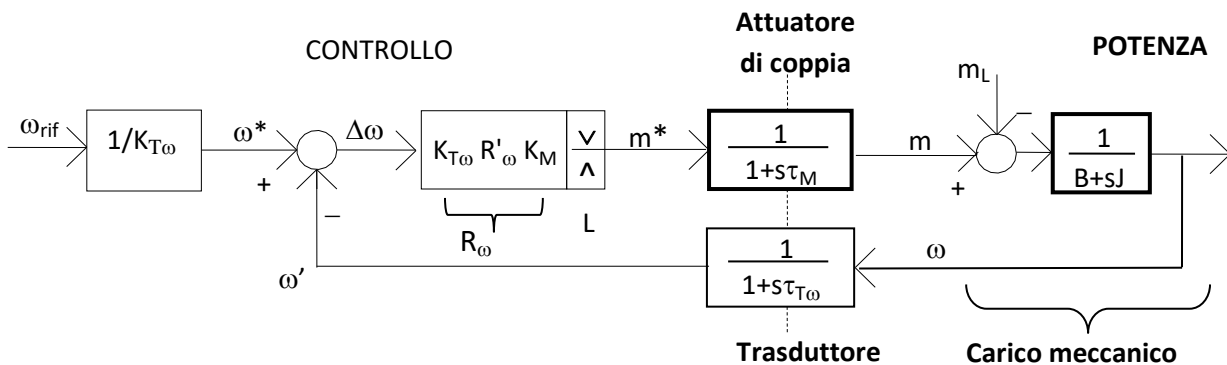


Fig. 5.2 b) - Schema di controllo di velocità a catena chiusa modificato

- a) specifiche relative alla stabilità quali per esempio
  - a. valore del margine di fase
  - b. entità della sovra-elongazione
- b) specifiche relative alla dinamica
  - a. valore della banda passante
  - b. tempo di risposta o tempo di salita ad un riferimento a gradino
  - c. tempo di assestamento ad un riferimento a gradino
- c) specifiche relative al funzionamento a regime
  - a. entità dell'errore di velocità a regime ad un riferimento a gradino
  - b. entità dell'errore di velocità ad una data coppia di disturbo

La teoria dei Controlli automatici insegna che le specifiche sopra riportate non sono fra loro indipendenti e liberamente prefissabili. Di conseguenza il progetto dovrà in certi casi trovare una soluzione di miglior compromesso fra le varie esigenze. Una volta progettato il regolatore  $R_\omega$  si potrà risalire al reale regolatore  $R'_\omega$  (che si dovrà magari realizzare o implementare) rimuovendo i fattori di scala  $K_{T\omega}$  e  $K_M$ .

In questi appunti si assumerà che il controllore di velocità  $R_\omega$  di Fig. 5.2 b) appartenga alla famiglia dei regolatori PID (*Proporzionale-Integratore-Derivativo*) la cui uscita è legata all'ingresso dalla relazione lineare

$$m^* = K_P \Delta\omega + K_I \int \Delta\omega dt + K_D \frac{d\Delta\omega}{dt} \quad (5.2)$$

che scritta in termini di Laplace trasformata (dominio di  $s$ ) diventa

$$M^*(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \Delta\Omega(s) \quad (5.3)$$

ove l'espressione entro parentesi definisce la *funzione di trasferimento (fdt) del regolatore di velocità di tipo PID*:  $R_\omega(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right)$ .

Nel corso di queste note si farà uso della tecnica di progetto dei regolatori basata sui *diagrammi di Bode (risposta in frequenza)*. Ogni altra tecnica di progetto del controllo (*luogo delle radici, diagrammi di Nyquist, ecc*) sarebbe comunque ugualmente applicabile.

La tecnica di progetto basata sui diagrammi di Bode richiede, come noto, lo studio del comportamento in frequenza della *fdt ad anello aperto*  $G(s)H(s)$ , semplicemente indicata anche con GH, ove  $G(s)$  è la *fdt*

della catena diretta, cioè della parte di sistema che va dall'errore di velocità alla velocità, mentre  $H(s)$  è la fdt della catena di reazione, che va dalla velocità reale alla velocità misurata. Il soddisfacimento delle specifiche del controllo a catena chiusa è ottenuto facendo soddisfare alla risposta in frequenza di GH peculiari condizioni e il soddisfacimento di tali condizioni si ottiene, se possibile, con un opportuno progetto del regolatore.

Il progetto prende avvio studiando dapprima, analiticamente e/o graficamente, la risposta in frequenza della fdt  $GH_R$  che è la fdt ad anello aperto ad esclusione del regolatore  $R_\omega$  che è ancora da definire. In base alla Fig. 5.2 si ottiene

$$GH_R(s) = \frac{1}{1+s\tau_M} \frac{1}{B+sJ} \frac{1}{1+s\tau_{T\omega}} = \frac{1}{B} \frac{1}{1+s\tau_M} \frac{1}{1+s\tau_m} \frac{1}{1+s\tau_{T\omega}} \quad (5.4)$$

Lo studio in frequenza della  $GH_R(s)$  si ottiene esaminando modulo e fase della funzione complessa  $GH_R(j\nu)$  nella variabile di studio  $\nu$  che si ricava dalla (5.4) con la sostituzione  $s=j\nu^{10}$ . I diagrammi approssimati (asintotici e costanti a tratti) che ne risultano del modulo (in dB) e della fase (in rad) sono quelli di Fig. 5.3, con la risposta asintotica del modulo  $GH_R$  nella parte superiore e della fase nella parte inferiore. Nella figura i punti di spezzamento sono stati posti alle frequenze angolari  $1/\tau_m$ ,  $1/\tau'$  e  $1/\tau''$  avendo assunto

$$\begin{aligned} \tau' &= \max(\tau_M, \tau_{T\omega}) && \text{solitamente è } \tau_M \\ \tau'' &= \min(\tau_M, \tau_{T\omega}) && \text{solitamente è } \tau_{T\omega} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La figura illustra anche un qualitativo andamento del reale andamento della risposta in frequenza della fase (linea curva a tratteggio sottile).

---

<sup>10</sup> Nella Teoria dei Controlli automatici la variabile ausiliaria per lo studio in frequenza è solitamente indicata con  $\omega$ , che in questi appunti è usata per definire la velocità. Per evitare confusione si adotterà allora il simbolo  $\nu$  (ni).



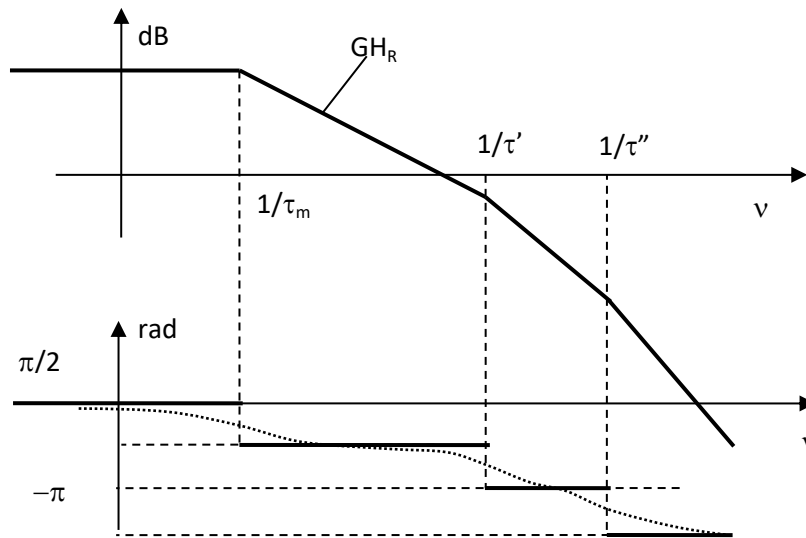


Fig. 5.3 - Diagrammi di Bode di  $\text{GH}_R(jv)$

### 5.1 - Progetto del controllore di velocità di tipo P (Proporzionale)

Il regolatore di velocità di tipo P è definito dalla relazione

$$R_\omega(s) = K_p \quad (\text{con } K_p > 0) \tag{5.6}$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto  $\text{GH}(s)$  si ottiene pertanto moltiplicando semplicemente  $\text{GH}_R(s)$  per  $K_p$  senza che ne venga modificata la mappa dei poli e degli zeri e, conseguentemente, resta inalterato il diagramma della risposta in frequenza della fase. Il solo effetto è una traslazione verticale verso l'alto ( $K_p > 1$ ) o verso il basso ( $K_p < 1$ ) del diagramma del modulo di Fig. 5.3, come rappresentato nella Fig. 5.4. Ciò fa variare la frequenza (angolare) di attraversamento  $v_{A\omega}$  (evidenziata per una delle curve in Fig. 5.4), che corrisponde approssimativamente alla banda passante  $2\pi f_{BW\omega}$  del controllo di velocità.

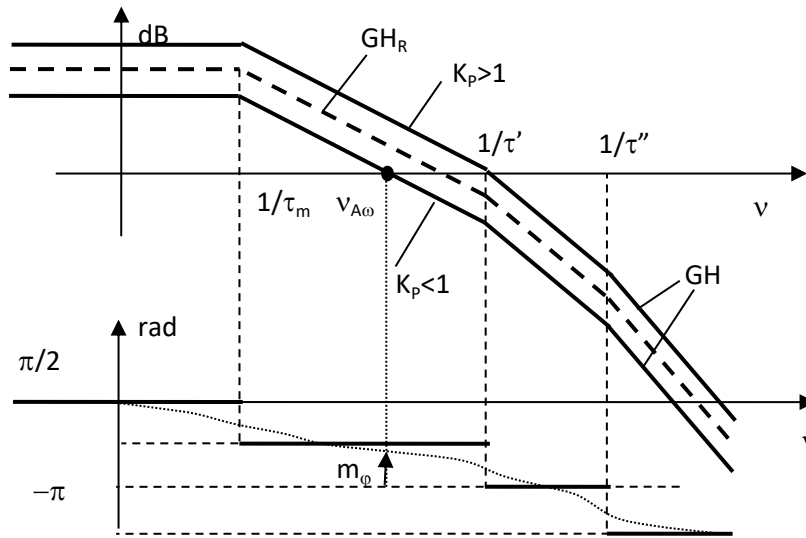


Fig. 5.4 - Diagrammi di Bode di GH(jv)

Con  $v_{A\omega}$  si modifica anche il margine di fase  $m_\phi$ , che è la differenza fra la fase di GH in corrispondenza a  $v_{A\omega}$  e  $-\pi$ . Per la stabilità del controllo il margine di fase deve essere positivo. Si riconosce che *per avere una margine di fase di almeno circa  $\pi/4$  rad (cioè 45°, che si può considerare il limite pratico inferiore in applicazioni di questo tipo) la frequenza di attraversamento  $v_{A\omega}$  non può superare  $1/\tau'$  e ciò comporta un limite superiore per la banda passante  $f_{BW\omega}$  che si può ottenere e per il valore di  $K_P$  che si può scegliere.*

A partire dalla (5.4) e aiutandosi con la Fig. 5.4, il valore di  $K_P$  può essere ottenuto analiticamente imponendo che alla desiderata frequenza di attraversamento  $v_{A\omega}$  il modulo di GH(jv) sia unitario (corrispondente al valore nullo in dB). Ne risulta:

$$1 = K_P \frac{1}{B} \frac{1}{\sqrt{(1+(v_{A\omega}\tau_m)^2)}\sqrt{(1+(v_{A\omega}\tau')^2)}\sqrt{(1+(v_{A\omega}\tau'')^2)}} \quad (5.7)$$

la cui unica incognita è il valore del guadagno proporzionale  $K_P$ . Assumendo che sia  $1/\tau_m < v_{A\omega} < 1/\tau'$  (cioè  $v_{A\omega}\tau_m > 1$ ,  $v_{A\omega}\tau' < 1$  e quindi anche  $v_{A\omega}\tau'' < 1$ ), ogni radicando della (5.7) può essere semplificato prendendo in ciascuno l'addendo maggiore e il risultato di  $K_P$  diventa allora

$$K_P = Jv_{A\omega} \quad \text{per } 1/\tau_m < v_{A\omega} < 1/\tau' \quad (5.8)$$

sicché la condizione per il *limite superiore del guadagno proporzionale*  $K_P$  risulta

$$K_p \leq J \frac{1}{\tau'} \quad (5.9)$$

Si può infine verificare il margine di fase  $m_\phi$  dalla fase della  $GH(jv)$  in corrispondenza alla frequenza angolare di attraversamento  $v_{A\omega}$ , con la:

$$m_\phi = \arg[GH(jv_{A\omega})] - (-\pi) = \pi + \arg[GH(jv_{A\omega})] \quad (5.10)$$

ovvero

$$m_\phi = \pi - \arctan(v_{A\omega}\tau_m) - \arctan(v_{A\omega}\tau') - \arctan(v_{A\omega}\tau'') \quad (5.11)$$

Si noti che il margine di fase non dipende da  $K_p$ , come già affermato, ma solo dalla frequenza angolare di attraversamento  $v_{A\omega}$ .

Per individuare un *limite inferiore al valore di  $K_p$* , si può esaminare il comportamento del controllo di velocità con regolatore P, in termini di errore a regime  $\Delta\omega(\infty) = \Delta\Omega$  ad un ingresso  $\omega^*$  costante.

L'errore a regime ad un ingresso costante  $\Delta\Omega = \Omega^* - \Omega$  (a regime stazionario  $\Omega' = \Omega$ ) può essere valutato dallo schema di Fig. 5.2 b) assumendo per ogni blocco il suo guadagno statico, cioè il valore risultante dalla sua fdt per  $s=0$ . Partendo da  $\Delta\Omega$  e assumendo per ora  $m_L = 0$ , percorrendo la catena si può scrivere:

$$\Delta\Omega K_p \frac{1}{B} = \Delta\Omega G(0) = \Omega = \Omega^* - \Delta\Omega \quad (5.12)$$

dalla quale l'errore risulta

$$\Delta\Omega = \frac{\Omega^*}{1 + K_p \frac{1}{B}} = \frac{\Omega^*}{1 + G(0)} \quad (5.13)$$

oppure

$$\Delta\Omega = \frac{B\Omega^*}{B + K_p} \quad (5.14)$$

Come si evince dal grafico di Fig. 5.4 il valore di  $G(0)$  (pari a  $GH(0)$  essendo  $H=1$ ) è finito e pertanto per la (5.12) l'errore è sempre non nullo e tanto più grande quanto più piccolo è  $G(0)$ . Solo se il carico meccanico è puramente inerziale ( $B=0$ ) si trova che  $G(0) = \infty$  e le (5.13) e (5.14) mostrano che l'errore a regime è nullo. Se invece  $B>0$ , una riduzione dell'errore a regime si ottiene aumentando  $K_P$ , ma ciò non può essere forzato a piacere per il limite superiore che affligge  $K_P$  per le esigenze di stabilità sopra discusse.

Effetto della coppia di disturbo - In presenza di coppia di disturbo costante  $m_L = M_L$ , lo stesso procedimento usato per la (5.12) porta a scrivere

$$(\Delta\Omega K_P - M_L) \frac{1}{B} = \Omega = \Omega^* - \Delta\Omega \quad (5.15)$$

dalla quale risulta

$$\Delta\Omega = \frac{\Omega^* + M_L \frac{1}{B}}{1 + K_P \frac{1}{B}} = \frac{\Omega^* + M_L \frac{1}{B}}{1 + G(0)} \quad (5.16)$$

oppure

$$\Delta\Omega = \frac{B \Omega^* + M_L}{B + K_P} \quad (5.17)$$

che indica che l'errore a regime è non nullo anche se  $B=0$  e che comunque sempre si riduce all'aumentare di  $K_P$ .

Fissato il massimo errore di velocità  $\Delta\Omega_{\max}$  consentito, dalla (5.17) si ricava la condizione

$$K_P \geq \left( \frac{B \Omega^* + M_L}{\Delta\Omega_{\max}} - B \right) \quad (5.18)$$

che risulta tanto maggiore quanto minore è l'errore voluto.

Quando le (5.9) e (5.18) non possono essere contemporaneamente soddisfatte, occorre passare ad un regolatore di velocità di altro tipo, come per esempio un regolatore PI.

## 5.2 - Progetto del controllore di velocità di tipo PI

Il regolatore di velocità di tipo PI è retto dalla relazione

$$R_{\omega}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{1+s\tau_R}{s\tau_R} = K_I \frac{1+s\tau_R}{s} \quad (5.19)$$

ove  $\tau_R = K_P / K_I$  è la costante di tempo del regolatore.

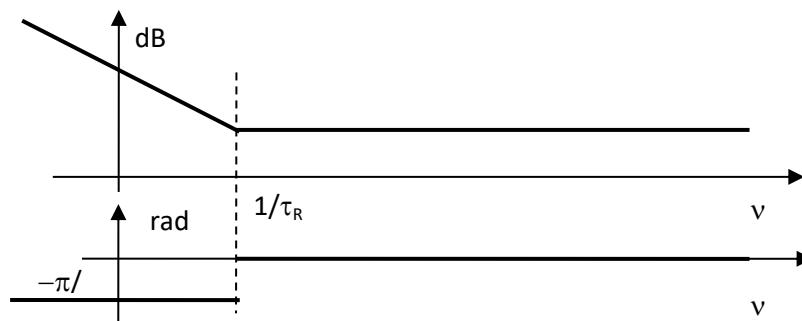


Fig. 5.5 - Diagrammi di Bode di un regolatore PI

La sua rappresentazione in termini di risposta in frequenza è in Fig. 5.5.

La funzione di trasferimento ad anello aperto  $GH(s)$  si ottiene ancora moltiplicando  $GH_R(s)$  per la  $R_{\omega}(s)$  data dalla (5.19). In termini di risposta in frequenza ciò corrisponde a sommare le ampiezze (in dB) e le fasi della  $GH_R(jv)$  e della  $R_i(jv)$  come illustrato in Fig. 5.6.

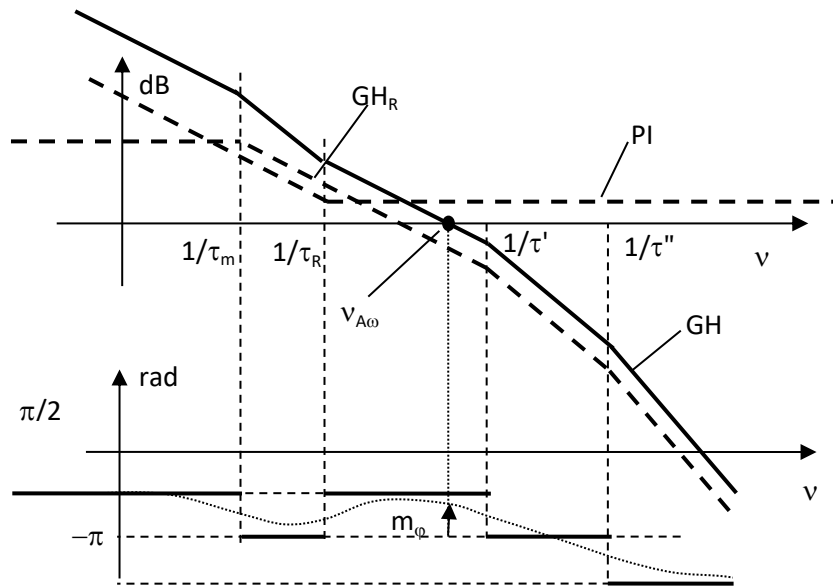


Fig. 5.6 - Diagrammi di Bode di  $GH(j\nu)$

Per poter collocare la frequenza di attraversamento ad un valore più alto possibile, la costante di tempo  $\tau_R$  del regolatore di velocità deve essere maggiore della costante di tempo  $\tau'$  (cioè  $1/\tau_R < 1/\tau'$ ) come nella Fig. 5.6 così da avere una porzione sufficientemente ampia della scala delle frequenze, limitata superiormente da  $1/\tau'$ , ove la fase di GH è maggiore (più alta in figura) di  $-\pi$ .

Si osserva che i comportamenti alle alte frequenze, cioè al di sopra di  $\nu = 1/\tau_R$  dei diagrammi di Bode di Fig. 5.4 (regolatore di tipo P) e di quelli di Fig. 5.6 (regolatore di tipo PI) non differiscono. Ciò è conseguenza del fatto che alle alte frequenze il regolatore PI si comporta come un semplice regolatore P, avendo la parte proporzionale un effetto dominante sulla quella integrale. Di conseguenza dal punto di vista degli indici di stabilità e della banda passante le due soluzioni sono equivalenti e permangono gli stessi limiti di banda passante e di guadagno proporzionale dedotti nella discussione del regolatore di tipo P: *per avere una margine di fase di almeno  $\pi/4$  rad la frequenza di attraversamento  $\nu_{A\omega}$  non può superare  $1/\tau'$  e ciò comporta un limite superiore per la banda passante  $f_{BW\omega}$  che si può ottenere e per il valore che si può imporre a  $K_P$ .*

Con buona approssimazione il guadagno proporzionale si può pertanto ancora stimare con la (5.8) i cui limiti di validità diventano in questo caso

$$K_P = J\nu_{A\omega} \quad \text{per } 1/\tau_R < \nu_{A\omega} < 1/\tau' \quad (5.20)$$

oppure, più precisamente dalla:

$$1 = K_P \frac{1}{B \nu_{A\omega} \tau_R} \frac{\sqrt{(1 + (\nu_{A\omega} \tau_R)^2)}}{\sqrt{(1 + (\nu_{A\omega} \tau_m)^2)} \sqrt{(1 + (\nu_{A\omega} \tau)^2)} \sqrt{(1 + (\nu_{A\omega} \tau'')^2)}} \quad (5.21)$$

una volta fissati i valori di  $v_{A\omega}$  e di  $\tau_R$ . La (5.21) è stata ricavata con procedimento analogo a quello usato per la (5.7) tenendo presente le espressioni di  $GH_R$  (5.4) e del regolatore PI (5.19). Ancora vale la condizione (5.9) che limita superiormente il valore di  $K_P$ .

Dal valore di  $\tau_R$  dipende il margine di fase che è sempre espresso dalla (5.10). Nel caso in esame di regolatore di velocità di tipo PI diventa:

$$m_\phi = \pi + \left[ \arctan(v_{A\omega}\tau_R) - \frac{\pi}{2} \right] - \arctan(v_{A\omega}\tau_m) - \arctan(v_{A\omega}\tau') - \arctan(v_{A\omega}\tau'') \quad (5.22)$$

nella (5.22) i due addendi a secondo membro entro parentesi quadre sono i contributi del regolatore.

La (5.22) può essere utilizzata per progettare  $\tau_R$  fissati il margine di fase e il valore di  $v_{A\omega}$ . Naturalmente per quest'ultimo e per il margine di fase si devono imporre valori fisicamente ottenibili secondo le indicazioni della Fig. 5.6.

Una regola di buon progetto consiste nello scegliere  $v_{A\omega}$  e  $\tau_R$  in modo che siano soddisfatte le condizioni  $v_{A\omega} = a(1/\tau_R)$  e  $a v_{A\omega} = (1/\tau')$  (con  $a > 1$ ) ovvero che  $v_{A\omega}$  sia pari alla media geometrica fra  $1/\tau_R$  e  $1/\tau'$  cioè valga

$$v_{A\omega} = \sqrt{\frac{1}{\tau_R} \frac{1}{\tau'}} \quad (\text{metodo dell'ottimo simmetrico}) \quad (5.23)$$

Valori appropriati del fattore  $a$  sono compresi fra 2 e 4.

Quindi con la (5.21) o la (5.20) si valuta  $K_P$ . Infine, una volta calcolati  $\tau_R$  e  $K_P$ , si ottiene facilmente  $K_I$  dalla

$$K_I = \frac{K_P}{\tau_R} \quad (5.24)$$

La proposta del valore ottimale del fattore  $a$  sopra suggerita può essere giustificata con le seguenti considerazioni. Si prenda in esame la situazione, molto comune, in cui  $\tau_m \gg \tau_R$  (che si può ottenere assumendo  $B \approx 0$ ) e  $\tau'' \approx 0$ . Allora lo schema di Fig. 5.2 b) si riduce a quello di Fig. 5.7 (per le condizioni di funzionamento lineare, cioè senza l'intervento del limitatore).

Dallo schema si ottiene che la fdt  $W(s)$  fra il riferimento di velocità e la velocità vera (fdt dell'anello chiuso) risulta:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{\Omega^*(s)} = \frac{K_P \frac{1+s\tau_R}{s\tau_R} \frac{1}{1+s\tau'} \frac{1}{sJ}}{1 + K_P \frac{1+s\tau_R}{s\tau_R} \frac{1}{1+s\tau'} \frac{1}{sJ}} \quad (5.25)$$

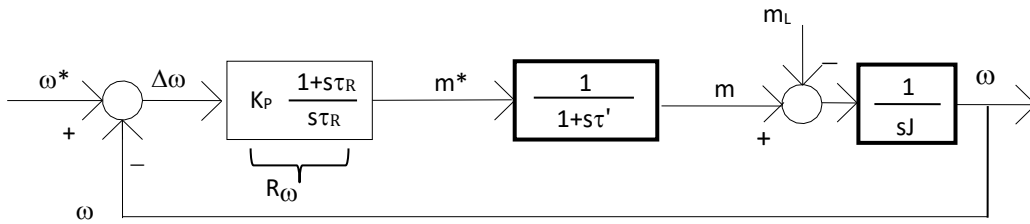


Fig. 5.7 Anello di controllo della velocità con carico inerziale

In tale espressione si possono fare le sostituzioni  $K_P = v_{A\omega} J$ ,  $\tau_R = a/v_{A\omega}$ ,  $\tau' = 1/(a v_{A\omega})$  ottenendo l'espressione

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{\Omega^*(s)} = \frac{1 + \frac{as}{v_{A\omega}}}{1 + \frac{as}{v_{A\omega}} + a \left(\frac{s}{v_{A\omega}}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{a v_{A\omega}}\right)} \quad (5.26)$$

Si riconosce che la  $W(s)$  ha guadagno statico  $W(0)$  unitario come deve essere trattandosi di un controllo a catena chiusa di tipo 1 (v. Teoria dei Controlli automatici) che ha errore a regime nullo ad un riferimento costante (ed errore a regime costante diverso da zero ad un riferimento a rampa). Ma si riconosce anche che il polinomio al denominatore (di terzo grado) ha una radice (cioè un polo della  $W(s)$ ) pari a  $s=-v_{A\omega}$ . Ne risulta che il denominatore  $D(s)$  può essere riscritto come prodotto di un polinomio di primo grado, avente la radice trovata, e di un polinomio di secondo grado con parametro di smorzamento  $\xi$  e frequenza naturale  $\omega_n$  da definirsi:

$$D(s) = 1 + \frac{as}{v_{A\omega}} + a \left(\frac{s}{v_{A\omega}}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{a v_{A\omega}}\right) = \left(1 + \frac{s}{v_{A\omega}}\right) \left(1 + 2 \frac{\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \quad (5.27)$$

Uguagliando i coefficienti di pari ordine dei polinomi di destra e di sinistra nell'ultima uguaglianza della (5.27) si ricavano infine:

$$\omega_n = v_{A\omega} \quad e \quad \xi = \frac{a-1}{2} \quad \text{ovvero } a = 2\xi + 1 \quad (5.28)$$

Come noto, lo smorzamento determina la presenza e l'ampiezza della sovraelongazione nella risposta indiciale di un sistema del secondo ordine. Volendo uno smorzamento  $\xi=1$  (valore minimo di  $\xi$  per non avere sovraeleongazione) occorre scegliere  $a=3$ . Per uno smorzamento  $\xi = 0.7$  (cui corrisponde una sovraelongazione del 5%) si sceglierà invece  $a=2.4$  e così via.

Può apparire sorprendente il caso in cui, nonostante la scelta di un valore di  $a$  compreso fra 2.4 e 3, la risposta  $\omega(t)$  della velocità ad un riferimento a gradino presenti una sovraelongazione anche ben maggiore del 5%. Ciò tuttavia si spiega osservando che la  $W(s)$  si può così scomporre:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{\Omega^*(s)} = \frac{1}{D(s)} + s\tau_R \frac{1}{D(s)} \quad (5.29)$$



e pertanto la risposta  $\omega(t)$  è la somma di due contributi, il secondo dei quali, proporzionale alla derivata del primo:

$$\omega(t) = \omega'(t) + \tau_R d\omega'(t)/dt \tag{5.30}$$

Il primo addendo  $\omega'(t)$  della  $\omega(t)$  rispetta le aspettative sulla sovraelongazione perché esso è governato dalla funzione di trasferimento  $1/D(s)$ ; ciò non si può invece dire per la risposta totale  $\omega(t)$  che comprende la forma gibbosa del secondo addendo, come mostrato in figura.

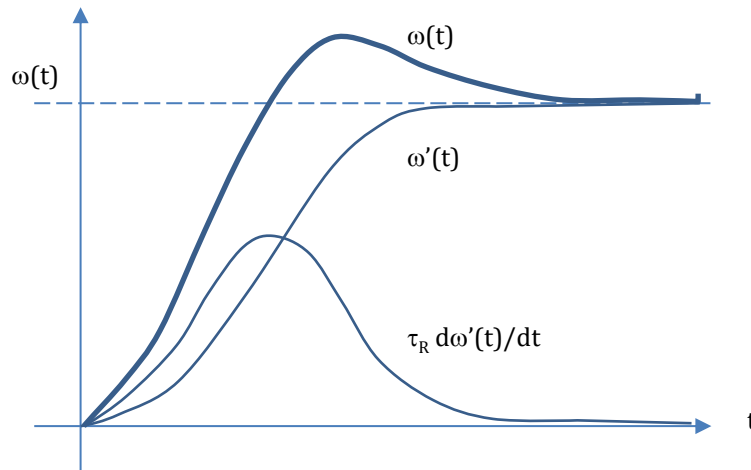


Fig. 5.8 – Risposta indiciale della  $W(s)$  data dalla (5.25)

Se eccessiva o comunque indesiderata, la sovraelongazione può essere evitata preconditionando il riferimento di velocità  $\omega(t)$  con un filtro passa basso del primo ordine avente il polo coincidente con lo zero della  $W(s)$  (che è la causa della sovraelongazione) così da attuare una cancellazione polo zero come nella sottostante Fig. 5.9(a).

Dalla figura (a) si ottiene (ricordando che  $K_I = K_P / \tau_R$ ):

$$M^*(s) = \left( \Omega^*(s) \frac{1}{1+s\tau_R} - \Omega(s) \right) \left( K_P \frac{1+s\tau_R}{s\tau_R} \right) = (\Omega^*(s) - \Omega(s)) \frac{K_I}{s} + \Omega(s) K_P \tag{5.31}$$

cui corrisponde lo schema del regolatore della Fig. 5.9 (b). Si nota che in esso l'azione integrale è applicata all'errore di velocità, mentre l'azione proporzionale agisce sulla velocità misurata. Qualora quest'azione di attenuazione della sovraelongazione risulti eccessiva, si può adottare lo schema (c) che, calibrando il coefficiente  $b$ , consente di ottenendo prestazioni intermedie fra quelle del PI convenzionale (con  $b=1$ ) e quelle dello schema (b) (con  $b=0$ ).

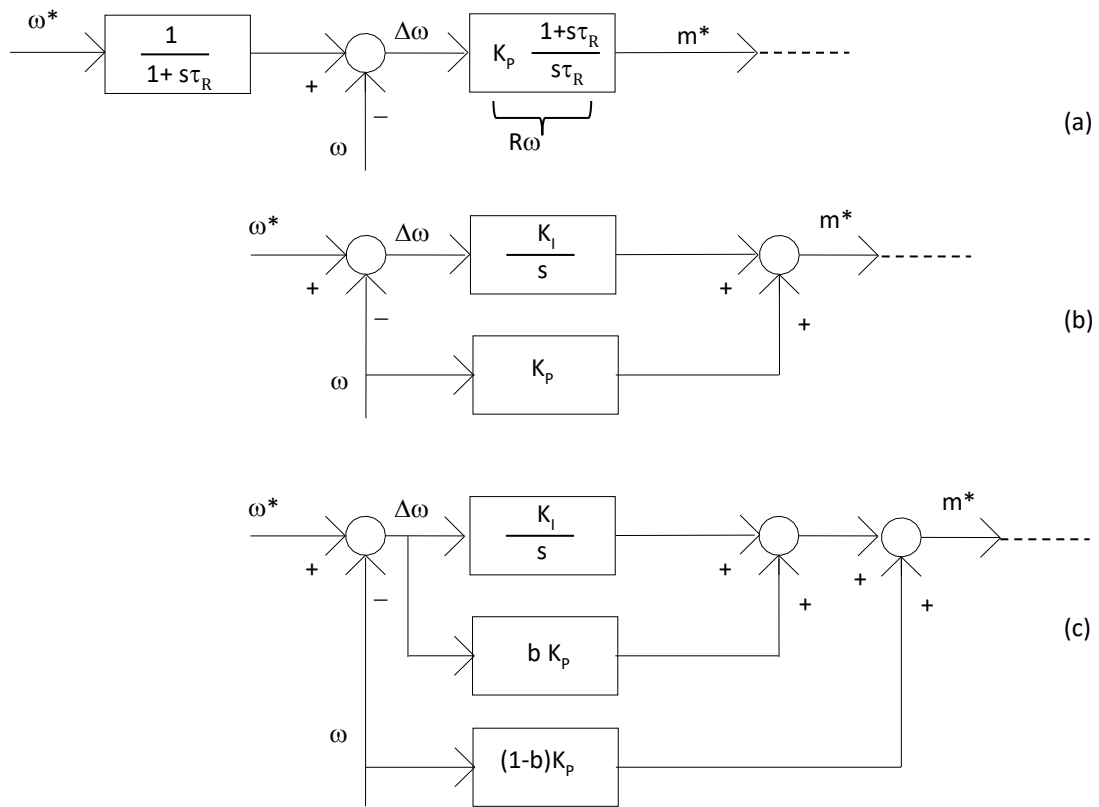


Fig. 5.9 – Forme alternative del regolatore PI di velocità

Effetto della coppia di disturbo - Il comportamento alle basse frequenze della fdt a catena aperta con regolatore PI e, in particolare, quello a frequenza nulla, è significativamente diverso da quello che si ottiene con regolatore P e merita di essere approfondito.

Si riconosce innanzitutto che ora, per ogni valor di B, la  $G(s)$  tende all'infinito per  $s$  che tende a zero: ( $G(0)=\infty$ ), cfr anche la Fig. 5.6. Di conseguenza per la seconda uguaglianza nella (5.16), ancora applicabile, l'errore di velocità a regime è sempre nullo (per il caso  $B=0$  si deve fare una valutazione al limite). Ciò pare ovvio avendo ottenuto, con l'introduzione dell'azione integrale nel regolatore, un sistema di controllo di tipo 1.

L'analisi dell'errore di velocità a regime non fornisce più quindi informazioni sul limite inferiore di  $K_P$  (o di  $K_I$ , fissato  $\tau_R$ ). Per ottenere una tale indicazione occorre studiare per esempio l'errore di velocità in condizione dinamiche all'applicazione di una coppia di disturbo a gradino. La Fig. 5.10 mostra l'andamento qualitativo delle principali grandezze per il caso in cui, a partire da una velocità a regime costante  $\Omega$ , si applica un disturbo di coppia a gradino di ampiezza  $M_L$  con un carico puramente inerziale ( $B=0$ ).

Essendo il carico puramente inerziale vale

$$m = m_L + J \frac{d\omega}{dt} \tag{5.32}$$

ed il termine inerziale, legato all'accelerazione angolare, sarà nullo quando la velocità è costante. Pertanto si avrà  $m(0)=m_L(0)=0$  prima dell'applicazione del gradino di coppia di disturbo e  $m(\infty) = m_L(\infty) = M_L$  a regime ( $t=\infty$ ) dopo l'applicazione del gradino di coppia di disturbo.

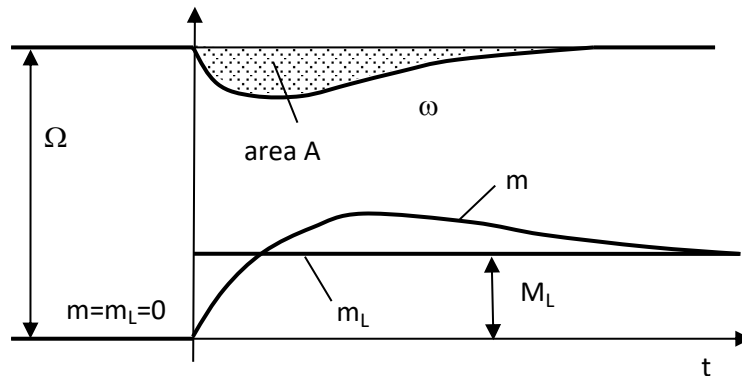


Fig. 5.10 - Risposta della velocità al gradino di coppia di disturbo con regolatore PI.

Si può anche scrivere, con riferimento alla Fig 5.2 b):

$$m(\infty) = M_L = m^*(\infty) = (K_p \Delta\omega(\infty) + K_I \int_0^{\infty} \Delta\omega(t) dt) = K_I \int_0^{\infty} \Delta\omega(t) dt \quad (5.33)$$

ove l'ultima eguaglianza deriva dal fatto che  $\Delta\omega(\infty)=0$ . L'integrale che compare nella (5.33) è pari all'area A di Fig. 5.10. Di conseguenza si ricava

$$K_I = \frac{M_L}{\int_0^{\infty} \Delta\omega(t) dt} \geq \frac{M_L}{A_{max}} \quad (5.34)$$

essendo  $A_{max}$  la massima area di Fig. 5.10 ammissibile. La (5.24) consentirà infine di calcolare  $K_p$ .

La (5.34) si può applicare anche in presenza di coefficiente di attrito viscoso  $B \neq 0$  il quale peraltro, da solo, concorre a contenere l'area A.

### 5.3 - Progetto del limitatore - Anti wind-up

La limitazione della coppia entro i suoi valori nominali si ottiene semplicemente introducendo all'uscita del regolatore di velocità di Fig. 5.2 un blocco limitatore L che forza il riferimento a stare nel campo ammesso  $\pm M_{rif,max}$  (in Fig 5.2 a)) al quale corrisponde la coppia  $\pm M_N$ . Nel caso dello schema di Fig. 5.2 b) il limitatore sarà fissato direttamente sui valori  $\pm M_N$ . La coppia verrà in tal modo limitata con una veloce dinamica (dettata dalla banda passante dell'attuatore di coppia).

Per un corretto funzionamento del controllo di velocità, la presenza dei limitatori richiede anche di prevedere nell'implementazione dei regolatori PI delle opportune limitazioni della parte integrale, oltre che dell'uscita, per evitare il fenomeno di persistenza dell'azione integratrice, noto come *wind-up*, anche quando esso non è necessario. Ad esempio, un regolatore velocità PI nella pratica potrebbe essere realizzato come illustrato in Fig. 5.11, ove le due azioni proporzionale e integrale agiscono

separatamente e sommano i loro contributi, parte proporzionale e parte integrale, per ottenere il segnale che, eventualmente limitato, costituisce il riferimento di coppia. Nella figura si suppone che il carico sia puramente inerziale e il controllo di coppia ideale, con guadagno unitario e senza ritardo.

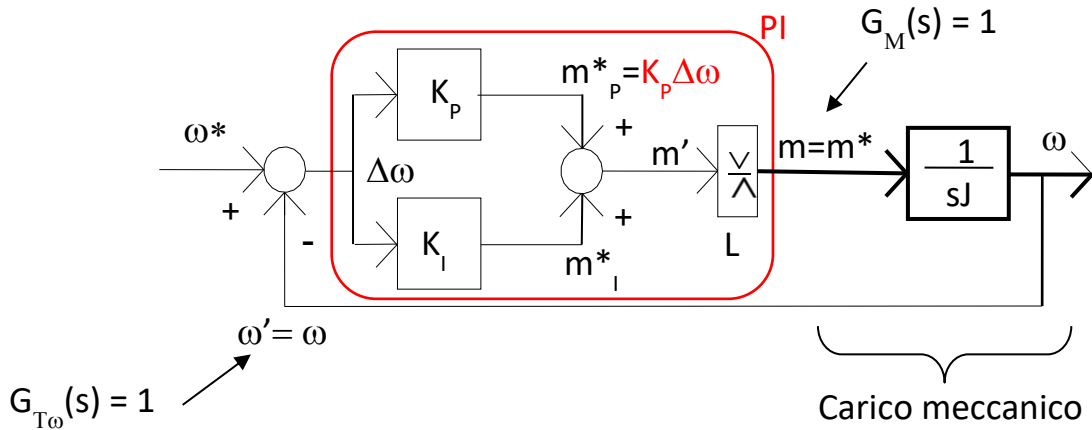


Fig. 5.11 – Regolatore di velocità PI senza anti wind-up e con carico inerziale

Si supponga di applicare un riferimento costante di velocità a partire dall'istante  $t=0$  (riferimento a gradino) con velocità iniziale nulla. Se l'ampiezza del riferimento è sufficientemente grande, assieme al guadagno proporzionale, la parte proporzionale  $m_p^* = K_p \Delta \omega$  da sola può essere maggiore della soglia  $L$  del limitatore del segnale di uscita del regolatore e quindi tale da determinare l'intervento del limitatore stesso, come mostra la Fig. 5.12. In queste condizioni la coppia applicata al carico è inizialmente costante, di valore determinato dal limitatore, e il carico di natura inerziale assume un'accelerazione positiva costante. L'errore di velocità  $e$ , come esso, la parte proporzionale, diminuiscono linearmente per annullarsi laddove la velocità raggiunge il suo riferimento, mentre la parte integrale (proporzionale all'integrale dell'errore di velocità) crescerà con andamento parabolico raggiungendo il suo valore massimo nel momento in cui l'errore è nullo e inverte il suo segno.

Se anche il guadagno integrale è sufficientemente grande, la parte integrale (che nel momento del suo massimo costituisce la totale risposta  $m'$  delle due azioni proporzionale e integrale) può mantenere in saturazione il limitatore, nonostante essa sia decrescente e la parte proporzionale negativa. La coppia pertanto rimane costantemente pari al suo limite e la velocità costantemente cresce ancora linearmente, superando il riferimento applicato. Solo quando il riferimento  $m'$  e con esso  $m=m^*$  continuando a decrescere raggiunge finalmente lo zero e si inverte, la velocità cessa di crescere e inizia la sua decrescita. Il valore massimo di velocità raggiunto può essere molto maggiore del riferimento  $\omega^*$ , ovvero si può manifestare un'ampia sovraoscillazione. Il comportamento si può poi ripetere con un'altrettanta ampia sottoscillazione e solo faticosamente spegnersi nel tempo.

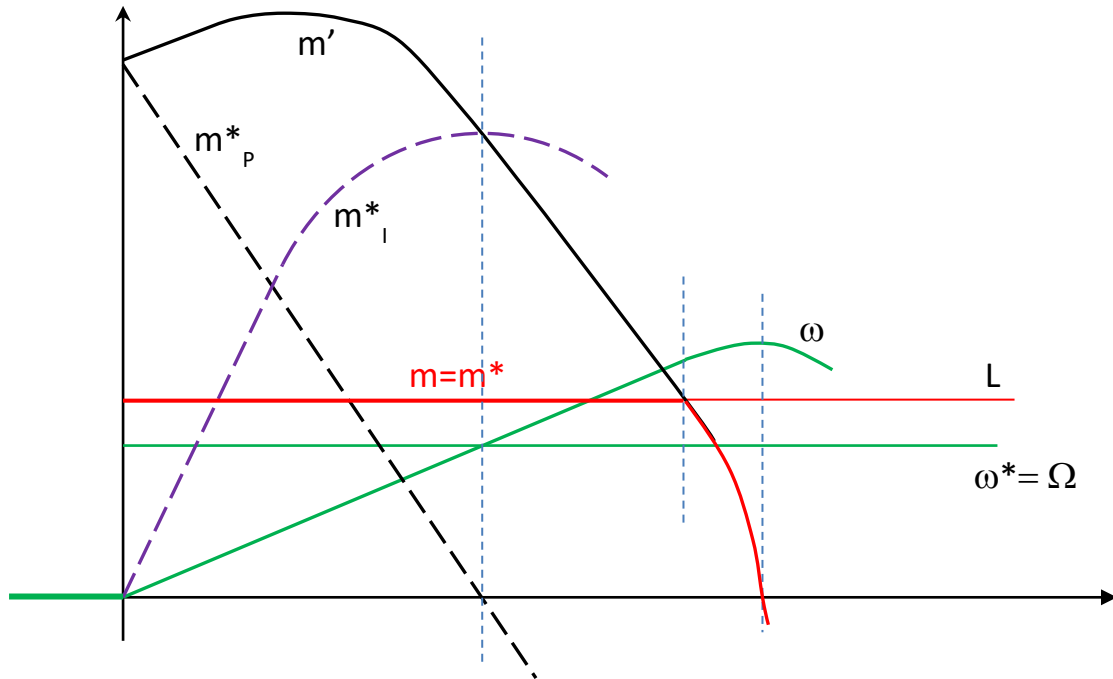


Fig. 5.12 – Possibile risposta di velocità con un regolatore Pi senza azione anti wind-up

Il fenomeno del wind-up appena descritto, si evita con la configurazione del regolatore PI di velocità di Fig. 5.13. La parte integrale contenuta in un'unica cornice con il suo limitatore sta a significare che trattasi di un "integratore limitato", cioè un blocco limitatore la cui azione integrale si attua solo finché il risultato dell'integrale rimane entro i limiti fissato, mentre la stessa azione cessa (l'integrale rimane costante) appena l'integrale raggiunge e cerca di fuoriuscire da tali limiti.

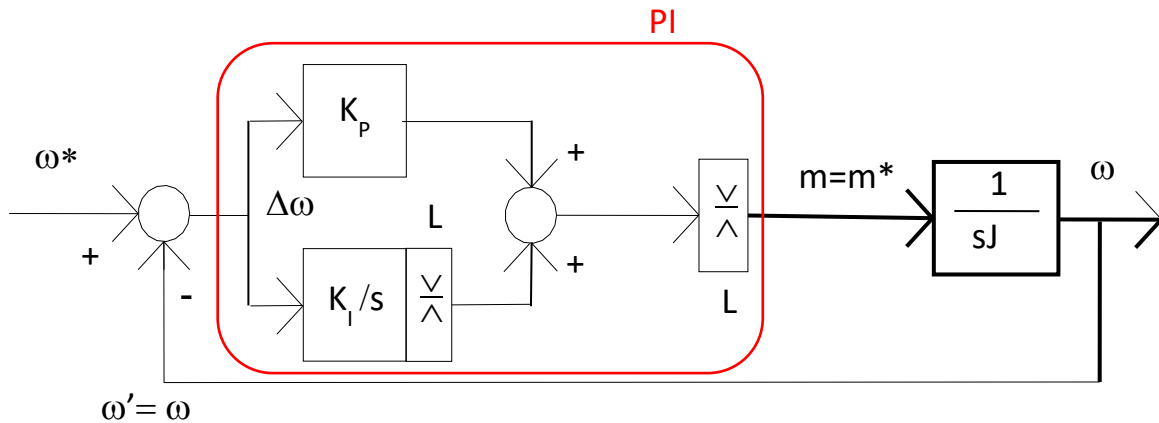


Fig. 5.13 - Regolatore di velocità PI con anti wind-up e con carico inerziale

Nelle stesse condizioni che hanno portato alla Fig. 5.12, assunti uguali i due limitatori di Fig. 5.13, il comportamento dell'anello di velocità con azione anti wind-up è quello illustrato in Fig. 5.14. In questo caso la parte integrale cessa di crescere appena raggiunto il livello L, sicché il riferimento di coppia viene fatto calare dal suo valore massimo consentito dal limitatore di uscita appena l'errore di velocità

cambia di segno. Con ciò si riduce drasticamente la causa della sovraoscillazione di velocità prima discussa che risulterà ora assai limitata.

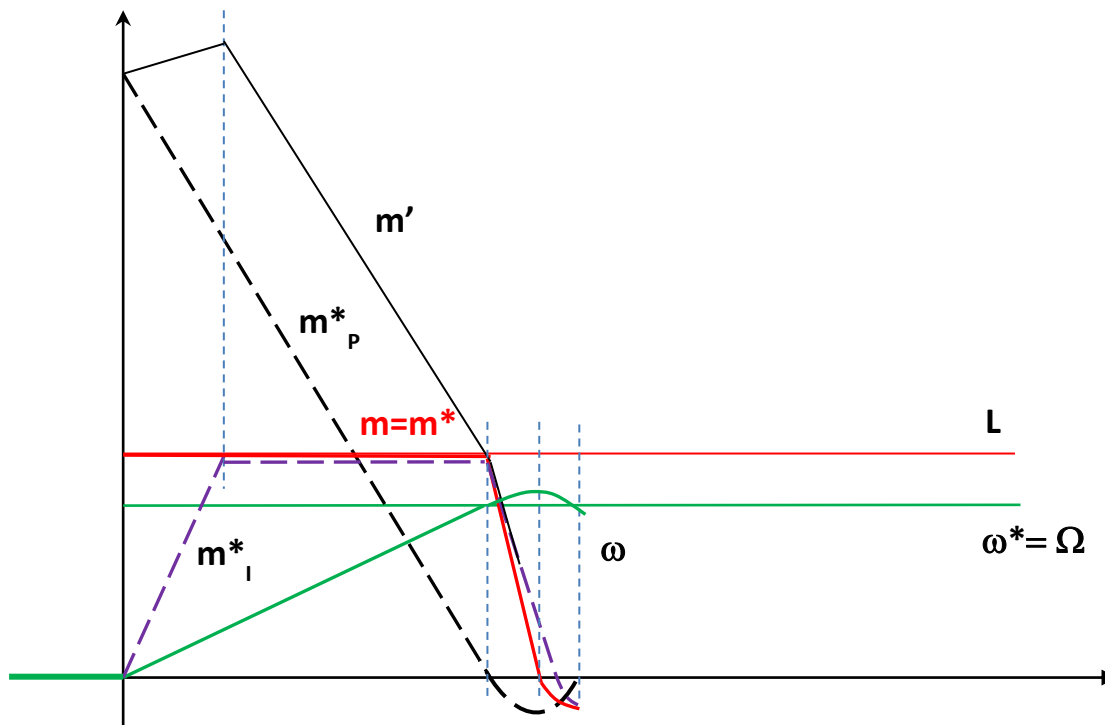


Fig. 5.14 – Possibile risposta di velocità con un regolatore Pi con azione anti wind-up

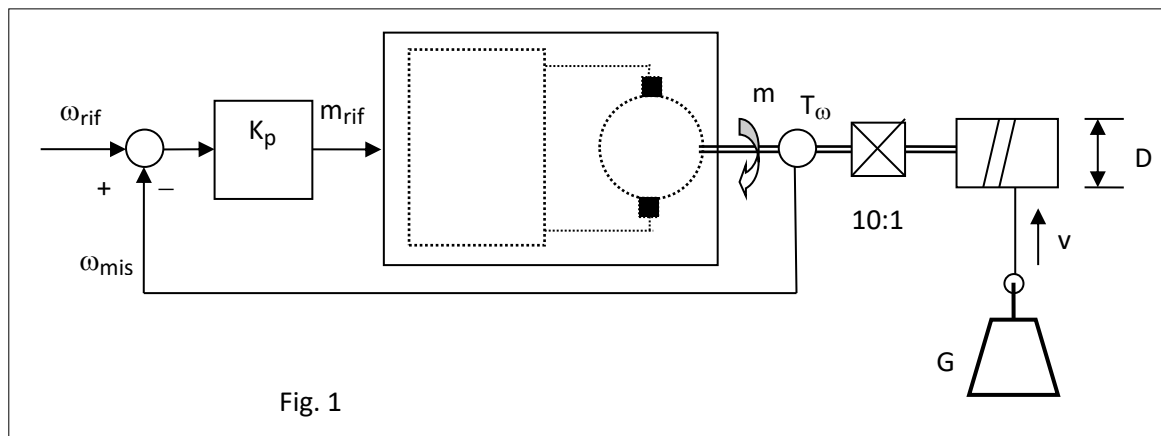
In conclusione, in assenza della limitazione sulla parte integrale succede che, in presenza di un errore di velocità ampio e persistente (per esempio positivo), l'integratore raggiunge valori che eccedono ampiamente il limite massimo posto in uscita al regolatore PI. Quando l'errore gradualmente diventa nullo e si rovescia, l'uscita del regolatore PI rimane insistentemente al suo valore massimo così forzata dal contributo dell'integrale. Solo dopo un certo tempo dopo il rovesciamento di segno dell'errore di velocità (in definitiva dopo che la velocità avrà superato ampiamente il suo riferimento) l'integratore si sarà "scaricato" e l'uscita potrà diminuire. Il fenomeno si potrà però manifestare di nuovo con segno diverso della grandezza di uscita, innescando una pendolazione che a volte si esaurisce con difficoltà.

Limitando il fenomeno del wind-up diminuisce la sovraoscillazione (overshoot) nella risposta ad un gradino di riferimento; non è opportuno esaltare troppo questa diminuzione, perché a regime tutto il riferimento di coppia deve essere prodotto dalla parte integrale, (in quanto l'errore a regime è nullo). Ecco perché solitamente si pongono uguali i due limiti di figura.

Una possibile miglione consiste nel limitare la parte integrale in modo dinamico, fissando cioè un limite che dipende dall'attuale contributo della parte proporzionale. Se, per esempio, il limite d'uscita è stato fissato pari a 20 e, in un certo istante, il contributo della parte proporzionale del regolatore di velocità vale 15, si limita la parte integrale a  $(20-15)=5$ , perché sarebbe inutile (e deleterio) un contributo maggiore. L'eccedenza ai 20 verrebbe infatti tagliata dal limitatore d'uscita.

## Esercizi

1) Si consideri il controllo di velocità di figura che fa uso di un azionamento in corrente continua a quattro quadranti impiegato come attuatore di coppia che genera una coppia di  $M=50 \text{ Nm}$  quando il riferimento  $M_{rif}$  è di  $10 \text{ V}$  mentre la sua dinamica rappresentata da un blocco di ritardo del primo ordine con costante di tempo  $\tau_M=20 \text{ ms}$ . La velocità del motore è misurata con un trasduttore di velocità  $T_\omega$  con ritardo trascurabile ( $\tau_{T_\omega} \cong 0$ ) e che fornisce  $10 \text{ V}$  quando la velocità è di  $2000 \text{ rpm}$ . Il carico è un sistema di sollevamento (v. Fig. 1) accoppiato attraverso un riduttore di velocità ideale (senza perdite) con rapporto  $10:1$ . Il tamburo ha diametro  $D$  di  $0.4 \text{ m}$  e il peso  $G$  è di  $250 \text{ kg}$ . Il momento di inerzia del motore (compresa la parte veloce del riduttore) è pari a  $J_m = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Kgm}^2$  e quello del tamburo (compresa la parte lenta del riduttore)  $J_t = 1 \text{ Kgm}^2$  mentre sono trascurabili il momento di inerzia del trasduttore di velocità, il peso e l'elasticità della fune. Non ci sono neanche attriti né coulombiani né viscosi.

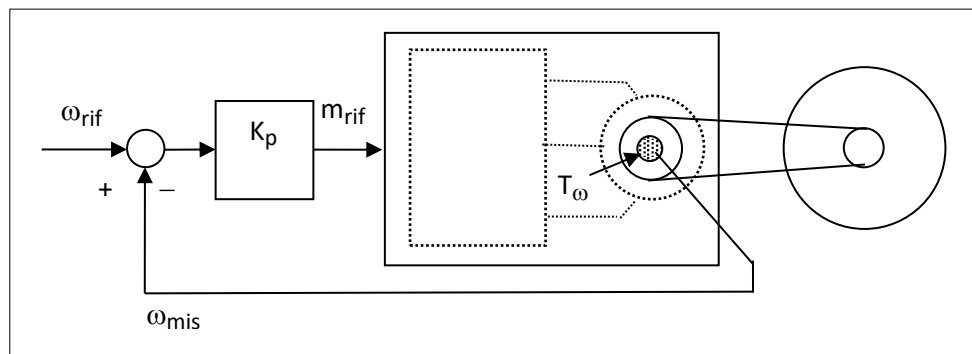


- Studiare la risposta in frequenza dell'anello aperto di velocità (diagrammi di Bode di GH) assumendo un regolatore di velocità solamente proporzionale con  $K_p=100$ .
- Dedurre frequenza di attraversamento (banda passante) e margine di fase.
- Calcolare infine la velocità  $v$  a regime del carico quando il riferimento di velocità  $\omega_{rif}$  è posto a ZERO.

2) Si consideri il controllo di velocità di Fig. 2 che fa uso di un azionamento con motore sincrono a magneti permanenti (motore brushless) impiegato come attuatore di coppia. Il guadagno statico dell'attuatore di coppia è tale che esso genera a regime una coppia di  $M=10$  Nm con un riferimento costante  $M_{rif}$  di 10 V. La dinamica dell'attuatore di coppia è rappresentata da un blocco del primo ordine con costante di tempo di 1 ms. La velocità del motore è misurata con un trasduttore di velocità  $T_\omega$  senza ritardo apprezzabile e che fornisce 10 V quando la velocità è di 3000 rpm. Il carico è costituito da una mola smerigliatrice trascinata da un sistema cinghia-pulegge con la puleggia del motore di diametro doppio di quella della mola. Il momento di inerzia del motore (compreso quello della sua puleggia e del trasduttore di velocità) è pari a  $10^{-3}$  Kg $_m$ m $^2$ . Quello della mola (compreso quello della sua puleggia) è di  $2,5 \cdot 10^{-3}$  Kg $_m$ m $^2$ . La cinghia abbia massa ed elasticità trascurabili. Si assumano trascurabili anche gli attriti statici o viscosi.

Calcolare il guadagno  $K_p$  che assicura un controllo di velocità stabile con margine di fase di  $60^\circ$ .

- Determinare quindi il valore della banda passante del controllo di velocità che risulta con il valore di  $K_p$  precedentemente calcolato.
- Valutare infine il valore del riferimento di velocità  $\omega_{rif}$  da applicare per avere una velocità di rotazione della mola di 5000 rpm.





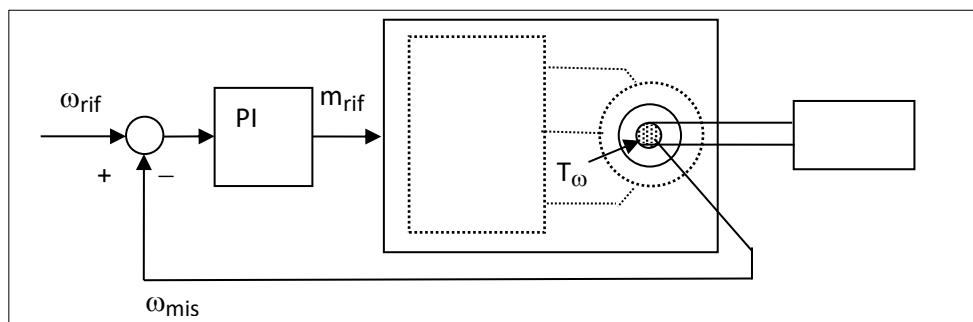
3) Si consideri il controllo di velocità di figura che fa uso di un azionamento con motore sincrono a magneti permanenti (motore brushless) impiegato come attuatore di coppia.

Il guadagno statico dell'attuatore di coppia è tale che esso genera a regime una coppia di  $M=10$  Nm con un riferimento costante  $M_{rif}$  di 10 V. La dinamica dell'attuatore di coppia è rappresentata da un blocco del primo ordine con costante di tempo di 1 ms.

La velocità del motore è misurata con un trasduttore di velocità  $T_\omega$  senza ritardo apprezzabile e che fornisce 10 V quando la velocità è di 3000 rpm.

Il carico è sostanzialmente solo inerziale con momento di inerzia complessivo riportato al motore pari a  $0.01$  Kg.m<sup>2</sup>. Si assumano trascurabili ogni attrito statico o viscoso.

- a. Progettare i guadagni del regolatore PI di velocità per avere una banda passante di 10 Hz e quello del margine di fase di almeno 45°.
- b. Valutare il valore del riferimento di velocità  $\omega_{rif}$  da applicare per avere una velocità di rotazione del motore di 2000 rpm.



4) Si consideri il controllo di velocità di figura che fa uso di un azionamento a corrente continua a quattro quadranti impiegato come attuatore di coppia che genera una coppia (con una dinamica rappresentata da un blocco del primo ordine) di  $M=100$  Nm quando il riferimento  $M_{rif}$  è di 10 V. La velocità del motore è misurata con un trasduttore di velocità  $T_\omega$  senza ritardo e che fornisce 10 V quando la velocità è di 1500 rpm. Il carico è un sistema estrusore il cui comportamento meccanico è assimilabile a quello di un carico viscoso con coppia proporzionale alla velocità e tale da produrre una coppia all'estrusore  $M_e= 500$  Nm quando l'estrusore ruota alla velocità di 100 rpm. Non ci sono altri attriti statici o viscosi.

L'estrusore è connesso al motore attraverso un riduttore di velocità ideale (senza perdite) con rapporto 10:1 (v. figura).

- Calcolare la velocità di rotazione a regime del motore quando il riferimento di velocità  $\omega_{rif}$  è posto a 5 V e il regolatore di velocità è solo proporzionale con  $K_p=100$ .
- Calcolare quindi la velocità a regime del motore qualora l'estrusore venisse sconnesso mentre il riferimento di velocità rimane lo stesso.

