

ALBERTO CAVALLINI

MARIO SOVRANO

ELEMENTI DI
GASDINAMICA

OLAGGIO



PÀTRON EDITORE
BOLOGNA

ALL RIGHTS RESERVED

The text of this publication or any part thereof may not be reproduced in any manner whatsoever without permission in writing from the publishers

BARATO
FRANCESCO

PREFAZIONE

Il presente volume, preparato dai proff. A. Cavallini e M. Sovrano, copre una parte della materia svolta nel corso di Termodinamica Applicata della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Padova.

L'argomento del moto dei fluidi comprimibili è trattato essenzialmente con riferimento all'aspetto termodinamico del problema e largo spazio è dato al moto isoentropico, al moto di Fanno, al moto di Rayleigh, tenuto conto da una parte della preparazione acquisita dagli studenti nel corso di Fisica Tecnica e d'altra parte degli aspetti sotto i quali i problemi del moto dei fluidi sono sviluppati nel corso di Idraulica.

La trattazione dei vari capitoli consente eleganti e precise formulazioni matematiche che possono distogliere dalla considerazione dell'aspetto fisico del problema. Opportunamente gli autori hanno inserito numerosi esempi numerici riferiti a casi pratici.

Copyright © 1973 by Casa Editrice Pàtron

Stabilimento Editoriale Pàtron - 40127 Bologna - Quarto Inferiore

Spero che il volume offra agli studenti l'occasione per approfondire la cultura nel campo della Termodinamica che costituisce un elemento fondamentale nella formazione dell'Ingegnere meccanico.

LINO MATTAROLO

Direttore dell'Istituto di Fisica Tecnica

Padova, Gennaio 1973

RINGRAZIAMENTO

Desideriamo ringraziare il prof. Lino Mattarolo, Direttore dell'Istituto di Fisica Tecnica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Padova, per l'incoraggiamento ed i consigli ricevuti durante la stesura di questo volume.

Ringraziamo inoltre l'ing. Bruno Boldrin ed il p.i. Giampaolo Minozzi per la preziosa collaborazione, ed anche l'Editore per la veste tipografica decorosa che ha voluto dare a questo volume.

A.C. e M.S.

Padova, Istituto di Fisica Tecnica dell'Università.
Gennaio 1973

Lino Matta-
Tecnica del-
sità di Pado-
gli ricevuti

o Boldrin ed
eziosa colla-
a veste tipo-
a questo vo-

e M.S.

SIMBOLOGIA

A	area della sezione normale del condotto
c	velocità di propagazione di un impulso infinitesimo di pressione (velocità del suono)
C	perimetro della sezione normale del condotto
c_p, c_v	calore specifico rispettivamente a pressione costante e a volume costante
d	diametro della sezione circolare del condotto
d_e	diametro equivalente della sezione normale del condotto
E, E_T, E_s	modulo di comprimibilità, rispettivamente lungo una trasformazione generica, isoterma, isoentropica
f, \bar{f}	fattore d'attrito
ΣF_x	risultante delle componenti delle forze nella direzione del moto
g	accelerazione del campo gravitazionale
G	portata specifica di massa
h	entalpia specifica
h_0	entalpia di ristagno (o di arresto) specifica
k	(= c_p/c_v) rapporto dei calori specifici caratteristici per un gas ideale

l	lunghezza di condotto
l_{ma}	lunghezza massima di condotto per deflusso continuo
$L', \delta L'$	lavoro con deflusso scambiato dall'unità di massa di fluido
m	massa
M	numero di Mach locale
\bar{M}	numero di Mach critico
M_m	massa molecolare
n	esponente
p	pressione statica
p_0	pressione di ristagno (o di arresto)
q	flusso termico
$Q, \delta Q$	calore scambiato dall'unità di massa di fluido
R, \bar{R}	costante (rispettivamente particolare ed universale) del gas allo stato ideale
$R, \delta R$	lavoro delle forze dissipative d'attrito, relativo all'unità di massa di fluido
Re, Re_x	numero di Reynolds; numero di Reynolds locale
s	entropia specifica
t	temperatura (statica)
T	temperatura (statica) assoluta
T_0	temperatura assoluta di ristagno (o di arresto)
u	velocità
v	volume specifico
V	volume
W	portata di massa
x	coordinata; titolo del vapore saturo umido

z	quota rispetto ad un piano orizzontale di riferimento
α_1, α_2	angoli
ΔS_1	aumento di entropia specifica per irreversibilità
ϵ/d_e	scabrezza relativa del condotto
η_u	rendimento isoentropico dell'ugello
μ	viscosità assoluta
ρ	densità
ρ_0	densità di ristagno (o di arresto)
τ	tempo
$\tau, \bar{\tau}, \bar{\tau}_0$	sforzi tangenziali d'attrito
ϕ	coefficiente di velocità dell'ugello

Altri pedici

1, 2	relativo alle sezioni 1 o 2 del condotto
12	dalla sezione 1 alla sezione 2 del condotto
F	relativo a moto di Fanno
g	riferito alla sezione di gola
R, Ray	relativo a moto di Reyleigh
s	relativo a moto (o trasformazione) isoentropico; relativo allo scarico del condotto

Apici

*	relativo allo stato $M = 1$ (stato di riferimento).
*t	relativo allo stato $M = 1/\sqrt{k}$ (stato di riferimento del moto isoterma).

orizzontale di

ifica per irre-

ndotto
dell'ugello

arresto)

o
dell'ugello

2 del condotto
ione 2 del con-

gola
igh
rmazione) isoen-
scarico del con-

l (stato di rife-

$1/\sqrt{k}$ (stato di
sotermo).

CAPITOLO I

EQUAZIONI FONDAMENTALI PER IL MOTO MONODIMENSIONALE

1.1 DEFINIZIONI.

Si consideri uno spazio sede di un fluido in movimento. Si definiscono ivi *linee di flusso* o *di corrente* come quelle "linee che in ogni punto ed istantaneamente sono tangenti al vettore velocità locale del fluido in movimento.

Il moto si dirà a *regime stazionario* o *permanente* quando, rispetto alla terna di riferimento fissata, tutte le grandezze che caratterizzano lo stato cinetico (ad es.: velocità vettoriale \vec{u} , etc.) e termodinamico (ad es.: pressione (statica) p ; temperatura (statica) T etc.) del fluido in movimento sono, in ogni punto dello spazio, indipendenti dal tempo. Nel caso contrario il moto si dirà a *regime vario*.

Nello spazio occupato dal fluido in movimento si consideri una linea chiusa: l'insieme delle linee

di corrente che si appoggiano a questa linea chiusa costituisce una superficie "tubolare". Lo spazio interno a questa superficie è detto *tubo di flusso*. Un tubo di flusso a sezione infinitesima è detto *filetto fluido*.

Da notare che nei moti a regime permanente le linee di corrente coincidono con le traiettorie delle particelle di fluido.

Con riferimento al moto di un fluido entro un tubo di flusso sufficientemente ristretto rispetto alla lunghezza può essere sovente applicata l'ipotesi che in ogni sezione piana normale all'asse i parametri dinamici e termodinamici del fluido abbiano valori praticamente uniformi, e che la deviazione della velocità dalla direzione assiale sia trascurabile; si parla in tali ipotesi di *corrente monodimensionale* o *lineare*. Questa ipotesi viene utilmente applicata nel caso di moto (a regime turbolento) di un fluido in condotti, quando, meno che nell'immediata prossimità delle pareti, la variazione delle proprietà del fluido in direzione normale alle linee di flusso è trascurabile rispetto alla variazione che ha luogo lungo le linee di flusso stesse; si considerano in tal caso valori "medi" delle proprietà del fluido nelle varie sezioni normali all'asse del condotto.

Con riferimento ad una corrente monodimensionale a regime permanente in un tubo di flusso, le proprietà del fluido possono quindi essere descritte con riferimento ad un'unica coordinata lineare: ci si riferisce usualmente ad un'ascissa lineare lungo l'asse del tubo di flusso, con orienta-

zione equiversa al vettore velocità \vec{u} (orientata quindi "nel senso del deflusso").

1.2 MODULO DI COMPRIMIBILITÀ (O DI ELASTICITÀ) DI UN FLUIDO.

Il modulo di comprimibilità (o di elasticità) di un fluido E resta definito dalla usuale relazione:

$$\left[dv = -\frac{1}{E} v \cdot dp \right]_x \quad (1.2.1)$$

con v : volume specifico e p : pressione.

Da notare che, essendo v e p variabili indipendenti, bisogna precisare la trasformazione lungo la quale la (1.2.1) è valutata. In corrispondenza si avranno diversi valori per il modulo di comprimibilità. Assumono particolare importanza il *modulo di comprimibilità isoterma*, E_T :

$$E_T = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (1.2.2)$$

ed il *modulo di comprimibilità isoentropico*, E_s :

$$E_s = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \quad (1.2.3)$$

con s : entropia specifica del fluido.

Per i liquidi usuali il modulo di comprimibilità (isoterma o isoentropico) assume valori dell'ordine di 10^9 N/m² (per l'acqua a temperatura

$t = 20^\circ \text{C}$ si ha: $E_T = 2,183 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_s = 2,198 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Per i gas a comportamento ideale, tenendo conto delle relazioni caratteristiche:

$$[pv = \text{cost}]_{T = \text{cost}} \quad \text{e} \quad [pv^k = \text{cost}]_{s = \text{cost}}$$

si ricava immediatamente dalla (1.2.2) e dalla (1.2.3):

$$E_T = p \quad (1.2.4)$$

$$E_s = kp \quad (1.2.5)$$

ove k è l'usuale rapporto tra i calori specifici caratteristici; $k = \frac{c_p}{c_v}$.

1.3 LEGGI FONDAMENTALI IN PROBLEMI DI GASDINAMICA.

I problemi di Gasdinamica che verranno affrontati nel seguito riguardano per lo più moti monodimensionali in tubi di flusso a regime permanente rispetto ad un riferimento inerziale opportunamente scelto. Tali tipi di moto vengono trattati con riferimento ad una o più equazioni che esprimono leggi fondamentali della Fisica. Nelle ipotesi poste tali equazioni sono:

a) *Equazione di Bernoulli generalizzata* (o equazione dell'energia meccanica):

$$\frac{du^2}{2} + g \cdot dz + v \cdot dp + \delta R + \delta L' = 0 \quad (1.3.1)$$

oppure, in forma finita:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 v \cdot dp + R_{12} + L'_{12} = 0 \quad (1.3.2)$$

ove:

z : quota rispetto ad un piano orizzontale di riferimento. L'asse z è orientato in senso contrario a quello del vettore accelerazione di gravità \vec{g} .

L'_{12} : lavoro "con deflusso", scambiato tra la sezione 1 e la sezione 2 del tubo di flusso dall'unità di massa di fluido. Vale la convenzione sul segno usuale.

R_{12} : lavoro delle forze dissipative tra le sezioni 1 e 2 del tubo di flusso, riferito all'unità di massa di fluido. Questo termine si annulla solo nel caso che la trasformazione del fluido tra 1 e 2 abbia luogo in maniera internamente reversibile, altrimenti è positivo (sezione 1 "a monte" della sezione 2).

Gli altri simboli conservano il loro significato usuale.

b) *Equazione del Primo Principio della Termodinamica* (o equazione dell'energia):

$$\delta Q = dh + \frac{du^2}{2} + g \cdot dz + \delta L' \quad (1.3.3)$$

oppure, in termini finiti:

$$Q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + L'_{12} \quad (1.3.4)$$

con:

Q_{12} : calore scambiato tra le sezioni 1 e 2 del tubo di flusso dall'unità di massa di fluido, con l'usuale convenzione per il segno;

e con ovvio significato per gli altri simboli.

c) *Equazione di continuità* (o di conservazione della massa).

Nelle ipotesi poste (corrente lineare a regime permanente in un tubo di flusso) esprime che attraverso ogni sezione normale del tubo di flusso la portata di massa W deve essere la stessa. In formule:

$$W = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (1.3.5)$$

cioè, in termini differenziali:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (1.3.6)$$

ove con A si è indicata l'area della sezione normale del tubo di flusso.

d) *Secondo Principio della Termodinamica*, che si esprime:

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (1.3.7)$$

e) Si deve inoltre far ricorso all'*equazione di stato* del fluido, o a relazioni derivate da questa in condizioni particolari di deflusso (isotermo, isoentropico etc.). Si rammenta che, per definizione, un gas a comportamento ideale segue l'equazione di stato:

$$pv = RT \quad (1.3.8)$$

e che per esso l'energia interna è funzione della sola temperatura; i calori specifici caratteristici C_p e C_v sono costanti a temperatura costante ⁽¹⁾.

f) Il *teorema della quantità di moto* si esprime con un'equazione che riesce di conveniente impiego in determinati problemi di gasdinamica. Si consideri un moto monodimensionale a regime permanente (rispetto ad un riferimento inerziale) in un tubo di flusso ad asse rettilineo (fig. 1.3.1).

Il fluido compreso tra le sezioni 1-1 e 2-2 nel tempuscolo $d\tau$ si sposterà nel volume compreso tra le sezioni 1'-1' e 2'-2'. La variazione della quantità di moto del fluido dovrà essere uguale all'impulso delle forze che hanno agito sul fluido nel tempuscolo $d\tau$. Agli effetti della valutazione della variazione della quantità di moto del fluido (nel tempuscolo $d\tau$) tutto è come se la massa dm di

⁽¹⁾ Nel seguito quando verrà ipotizzato il comportamento ideale per un gas verrà spesso tacitamente assunta l'ulteriore ipotesi che i suoi calori specifici caratteristici c_p e c_v si possano considerare costanti anche con la temperatura.

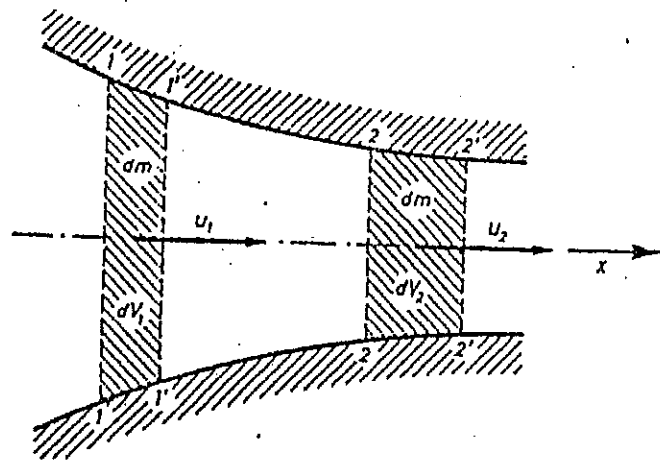


Fig. 1.3.1. - Variazione di quantità di moto nel deflusso monodimensionale a regime permanente in un tubo di flusso ad asse rettilineo.

fluidi ($dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot u_1 \cdot d\tau = \rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2 \cdot d\tau$) si sia spostata dalla posizione 1-1-1'-1'' (ove la velocità è u_1) alla posizione 2-2-2'-2'' (ove la velocità è u_2). Si potrà pertanto scrivere, con riferimento alla direzione coordinata x :

$$\Sigma F_x \cdot d\tau = dm \cdot (u_2 - u_1)$$

cioè, essendo $\frac{dm}{d\tau} = \rho Au = W$:

$$\Sigma F_x = W(u_2 - u_1) \quad (1.3.9)$$

con ΣF_x : risultante delle componenti (lungo la direzione del moto) di tutte le forze che agiscono nel fluido compreso tra le sezioni di controllo.

1.4 VELOCITÀ DEL SUONO. NUMERO DI MACH.

La trasmissione di "suoni" attraverso mezzi materiali è determinata dalla propagazione nel mezzo di onde di pressione di ampiezza limitata. La velocità di propagazione è determinata dalle proprietà elastiche del mezzo.

Nella fluidodinamica si definisce come "velocità del suono" la velocità di propagazione di una perturbazione *infinitesima* di pressione. Per determinare una espressione per la velocità del suono c si consideri un condotto ad asse rettilineo ed orizzontale e sezione costante, munito all'estremità sinistra (vedi fig. 1.4.1) di un pistone, e contenente un fluido inizialmente in quiete alla pressione (uniforme) p , temperatura (uniforme) T e densità ρ .

Il movimento del pistone verso destra con velocità uniforme (al limite infinitesima) du causerà nel fluido la propagazione di un'onda piana infinitesima di compressione con velocità (costante) c . Il fluido attraverso cui il fronte d'onda è passato sarà alla pressione $p + dp$, ed avrà densità $\rho + d\rho$ e velocità du . Il fluido verso cui il fronte d'onda procede sarà alla pressione p , densità ρ e in quiete. Rispetto ad un riferimento solidale con il condotto, la situazione sarà quella schematizzata in figura 1.4.1 (a).

Rispetto ad un nuovo riferimento (ancora inerziale) solidale col fronte d'onda, la situazione dinamica è quella rappresentata in fig. 1.4.1 (b). Il fluido scorre da destra a sinistra e, passando attraverso il fronte d'onda (stazionario) la sua velo-

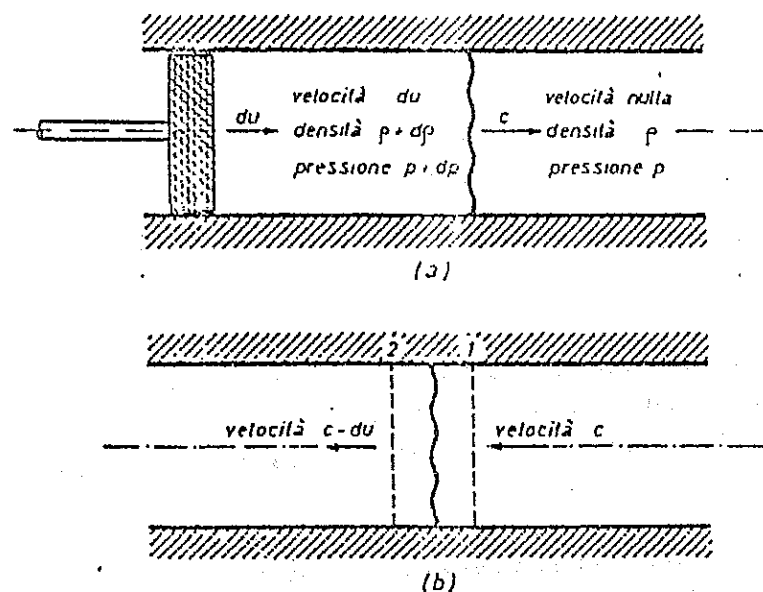


Fig. 1.4.1. - Propagazione di una perturbazione infinitesima di pressione:

- rispetto ad un osservatore in quiete;
- rispetto ad un osservatore solidale col fronte d'onda.

cità si riduce dal valore c al valore $c - du$; contemporaneamente la pressione passa dal valore p al valore $p + dp$ e la densità dal valore ρ al valore $\rho + d\rho$. Essendo il moto a regime stazionario, rispetto al riferimento solidale col fronte d'onda, si possono applicare le equazioni della quantità di moto e di continuità nella forma 1.3.9 e 1.3.5 al fluido compreso tra le sezioni di controllo 1 (immediatamente a monte del fronte d'onda) e 2 (immediatamente a valle del fronte d'onda).

La prima fornisce (forze di attrito trascurabili):

$$A [p - (p + dp)] = W [(c - du) - c] \quad (1.4.1)$$

da cui, ricordando che $W = \rho c A$:

$$dp = \rho \cdot c \cdot du \quad (1.4.2)$$

L'equazione di continuità si scrive:

$$\rho A c = (\rho + d\rho) A (c - du) \quad (1.4.3)$$

cioè, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$d\rho = \rho \frac{du}{c} \quad (1.4.4)$$

Dalla (1.4.2) e (1.4.4) si ricava:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (1.4.5)$$

Per una corretta interpretazione della relazione (1.4.5) bisogna stabilire la trasformazione lungo la quale valutare il termine $\frac{dp}{d\rho}$, non essendo la pressione p funzione della sola densità ρ . Analizzando le proprietà dei fluidi usuali si riconosce che le variazioni di volume specifico per effetto di una variazione di pressione infinitesima, nell'usuale campo di frequenze per i "suoni", sono essenzialmente adiabatiche. La variazione di pressione essendo infinitesima, il processo sarà anche re-

versibile, cioè isoentropico ⁽¹⁾. Si definisce perciò come *velocità del suono* l'espressione:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (1.4.6)$$

Tenendo conto dell'espressione (1.2.3) del modulo di elasticità isoentropico, si riconosce immediatamente che vale la:

$$c = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}} \quad (1.4.7)$$

Per un gas ideale si ricava l'espressione:

$$c = \sqrt{kpv} = \sqrt{kRT} = \sqrt{k \frac{\bar{R}}{M_m} T} \quad (1.4.8)$$

con:

$$\bar{R}: \text{costante universale dei gas} = \frac{8314,3 \text{ J}}{8317 \text{ joule/}} \quad (1.4.5)$$

M_m : massa molecolare del gas in considerazione.

Poiché k varia solo entro limiti ristretti, si vede come, in generale, gas a piccola massa molecolare hanno velocità del suono elevate e viceversa.

⁽¹⁾ Per una discussione esauriente su questo argomento, si veda: M. W. ZEMANSKY, *Calore e Termodinamica*, Zanichelli, Bologna, pag. 119.

PROBLEMA 1.4.1

Valutare la velocità di propagazione del suono nell'acqua a pressione atmosferica e alla temperatura $t = 20^\circ \text{C}$.

Si applica l'espressione (1.4.7):

$$c = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}}$$

Per l'acqua a $t = 20^\circ \text{C}$ si ha: $E_s = 2,198 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$; $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$:

$$c = \sqrt{\frac{2,198 \cdot 10^9}{998,2}} = 1483,9 \text{ m/s} \quad ***$$

PROBLEMA 1.4.2

Valutare la velocità di propagazione del suono alla temperatura $t = 20^\circ \text{C}$ per:

- Aria;
- Idrogeno;
- R-12 (Freon-12).

Il valore della pressione sia tale per cui il comportamento dei tre fluidi possa considerarsi ideale.

Nelle ipotesi poste si può applicare l'espressione (1.4.8):

$$c = \sqrt{k \frac{\bar{R}}{M_m} T}$$

a) per l'aria si ha: $k = 1,40$; $M_m = 28,97$
kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,40 \frac{8314,3}{28,97} 293} = 343 \text{ m/s} \quad ***$$

b) per l'idrogeno: $k = 1,405$; $M_m = 2,016$
kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,405 \frac{8314,3}{2,016} 293} = 1303 \text{ m/s} \quad ***$$

c) per l'R-12 si ha: $k = 1,14$; $M_m = 120,9$
kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,14 \frac{8314,3}{120,9} 293} = 152 \text{ m/s} \quad ***$$

Un parametro assai utile per il riferimento dello stato dinamico del fluido in problemi di gasdinamica è il *numero di Mach locale*, simbolo M , definito come rapporto della velocità locale del fluido u ed il valore c della velocità locale del suono nel fluido nello stesso punto:

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.4.9)$$

Da notare che la velocità del suono c non è generalmente costante lungo il deflusso di un fluido, il suo valore dipendendo dallo stato termodinamico locale del fluido stesso.

Con riferimento al valore del numero di Mach

locale si distinguono il *moto subsonico* ed il *moto supersonico*; il moto subsonico si ha dove risulta $M < 1$, mentre il moto supersonico si ha dove risulta $M > 1$; nel caso particolare in cui $M = 1$, risultando ivi $u = c$, si parla di *moto sonico*. Vengono a volte impiegate anche le dizioni di *moto transonico* (numero di Mach attorno al valore unitario) e *moto ipersonico* (numero di Mach notevolmente maggiore di uno); questi regimi di moto, come si vede, non sono quantitativamente ben definiti.

Il *numero di Mach locale* non dovrà essere confuso con altre definizioni di numero di Mach di impiego particolare (come il *numero di Mach critico*, che verrà definito più avanti). Quando ci si riferisce semplicemente al *numero di Mach* di un fluido, andrà sempre inteso il numero di Mach locale, così come definito dalla relazione (1.4.9).

1.5 STATO DI RISTAGNO O DI ARRESTO.

Nello studio di un fluido in moto risulta molto comodo definire delle grandezze (dette di *ristagno* o di *arresto*), il cui valore dipende dallo stato termodinamico e dinamico locale del fluido.

Si ha così l'*entalpia di ristagno* o di *arresto* h_0 , definita dalla relazione:

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \quad (1.5.1)$$

Considerando l'equazione del Primo Principio della Termodinamica (1.3.4) in assenza di scambi

di calore e lavoro e con variazione di energia potenziale nulla, si vede come l'entalpia di ristagno h_0 coincide col valore dell'entalpia che avrebbe il fluido se, con un processo adiabatico, fosse portato (a partire dalle condizioni locali) sino alla condizione di velocità nulla. Si può anche osservare che l'entalpia totale rappresenta (quando l'energia potenziale è trascurabile) l'energia totale specifica del moto.

Per un gas ideale si ha:

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (1.5.2)$$

È così definita la *temperatura di ristagno* (o *totale*) T_0 , cioè la temperatura che avrebbe il gas se il moto fosse portato, a partire dalle condizioni locali, adiabaticamente allo stato di velocità nulla. Tenendo conto della espressione della velocità del suono e che $c_p = kR/(k-1)$ l'equazione (1.5.2) diventa:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{c^2} \quad (1.5.3)$$

e quindi:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (1.5.4)$$

Il rapporto tra la temperatura di ristagno T_0 e la temperatura "statica" T della corrente indisturbata è funzione del numero di Mach e del rapporto k dei calori specifici.

Si può ora definire la *pressione di ristagno* (o *di arresto*) p_0 come il valore della pressione cui il fluido si porterebbe se, a partire dalle condizioni locali nella sezione di tubo di flusso considerata, fosse portato con un processo isoentropico fino allo stato di velocità nulla.

Per un gas ideale la relazione tra la pressione di ristagno p_0 e la pressione statica p del moto è:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)} \quad (1.5.5)$$

e per la (1.5.4):

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)} \quad (1.5.6)$$

Analogamente la densità di ristagno ρ_0 è espressa da:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(k-1)} \quad (1.5.7)$$

e per la (1.5.4):

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{1/(k-1)} \quad (1.5.8)$$

Valori dei rapporti T/T_0 , p/p_0 , ρ/ρ_0 in funzione del numero di Mach sono diagrammati per gas ideale con $k = 1,4$ (aria) in fig. 1.5.1 e tabulati in Appendice (A1, A2, A3) per gas ideali mo-

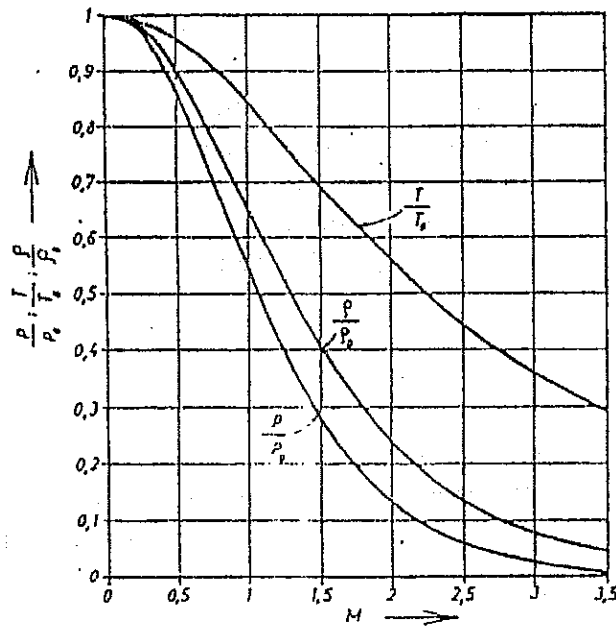


Fig. 1.5.1. - Rapporto tra grandezze statiche e corrispondenti grandezze di ristagno, per un gas ideale con $k = 1,4$, in funzione del numero di Mach M .

noatomici ($k = 1,67$), biatomici ($k = 1,4$) e triatomici ($k = 1,3$). Le figg. 1.5.2 e 1.5.3 mettono in evidenza come il rapporto delle temperature T/T_0 dipenda dalle proprietà del gas (cioè da k) in maniera più rilevante di quanto avvenga per il rapporto delle pressioni p/p_0 .

Le relazioni ricavate in questo paragrafo permettono di determinare lo stato di ristagno (T_0, p_0) associato ad un particolare stato locale del moto (T, p, u). Le grandezze di ristagno possono pure venire in ogni caso pensate come proprietà

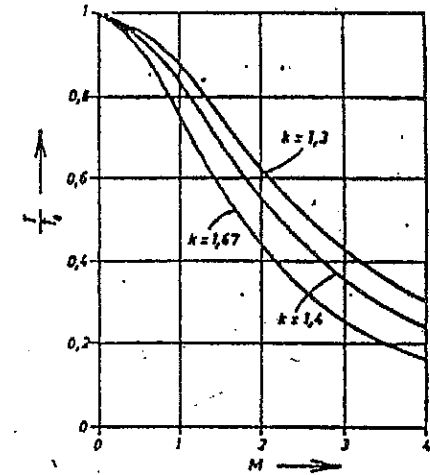


Fig. 1.5.2. - Rapporto tra la temperatura statica T e la temperatura di ristagno T_0 in funzione del numero di Mach M per gas ideali a differenti valori di k .

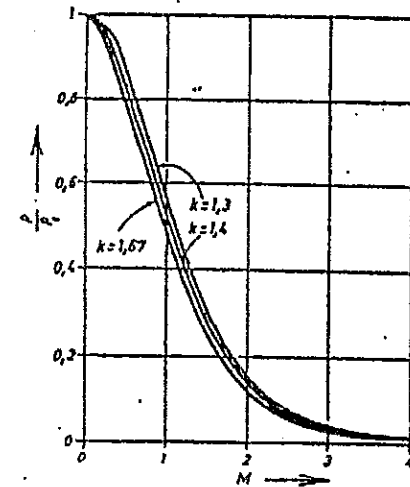


Fig. 1.5.3. - Rapporto tra la pressione statica p e la pressione di ristagno p_0 in funzione del numero di Mach M per gas ideali a differenti valori di k .

locali e se applicate a sezioni diverse qualsiasi 1 e 2 del tubo di flusso si avrà:

$$h_{01} = h_{02}; \quad T_{01} = T_{02} \quad (\text{gas ideale})$$

quando il moto è adiabatico ed inoltre:

$$p_{01} = p_{02}, \quad \rho_{01} = \rho_{02}$$

solo nel caso di deflusso isoentropico (fig. 1.5.4).

1.6 MOTO ADIABATICO PER GAS IDEALI: VELOCITÀ DI RIFERIMENTO; NUMERO DI MACH CRITICO.

Molti problemi che saranno considerati in seguito riguardano per lo più moti adiabatici a regime permanente.

L'equazione dell'energia (1.3.4), in assenza di scambio di calore e di lavoro e con variazione nulla di energia potenziale, si scrive:

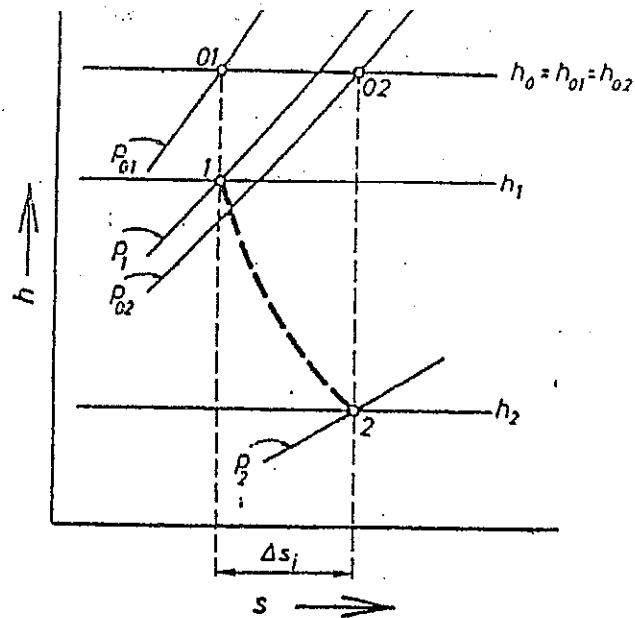
$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{cost}$$

che per un gas ideale, ricordando che $c_p = \frac{kR}{k-1}$ e $c = \sqrt{kRT}$, può essere scritta nella forma:

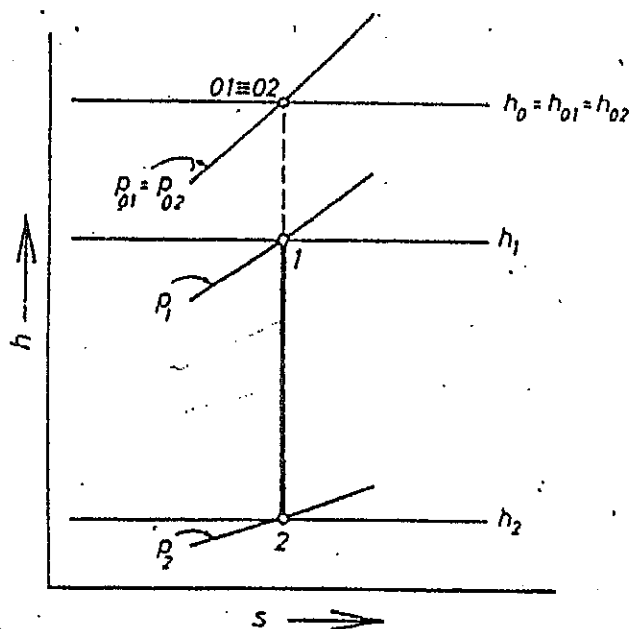
$$\frac{2}{k-1} c^2 + u^2 = \frac{2}{k-1} c_0^2 = \text{cost} \quad (1.6.1)$$

ove:

$$c_0 = \sqrt{kRT_0} \quad (1.6.2)$$



moto adiabatico (espansione)



moto isoentropico (espansione)

Fig. 1.5.4. - Nel moto adiabatico l'entalpia di ristagno ha valore costante; solo nel moto adiabatico reversibile (isoentropico) anche la pressione di ristagno

atura sta-
 T_0 in fun-
is ideali a

one statica
unzione del
a differenti

è la *velocità del suono nelle condizioni di ristagno* e può essere pensata come la rappresentazione dinamica dell'energia totale specifica del moto. La (1.6.1) mostra che, in un dato tubo di flusso, la velocità del fluido è sempre inferiore ad un certo valore limite u_{\max} corrispondente ad una velocità nulla del suono:

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} c_0 \quad (1.6.3)$$

Questa massima velocità del fluido sarebbe in pratica realizzata se il contenuto entalpico del fluido (fino alla temperatura di 0 °K) fosse completamente trasformato in energia cinetica. In questo caso un dispositivo termometrico mobile con la corrente dovrebbe indicare la temperatura di zero gradi assoluti.

In accordo con l'equazione (1.6.1) si vede che la velocità locale del suono c diminuisce all'aumentare della velocità locale del fluido u e viceversa come schematizzato in tabella:

$$\begin{array}{c|c} u & 0 \longrightarrow u = c \longrightarrow u_{\max} \\ c & c_0 \longrightarrow c = u \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ad un dato punto le due velocità sono eguali ed il loro valore comune:

$$u = c = u^* = c^* \quad (1.6.4)$$

indicato dal simbolo asteriscato, è chiamato *velocità critica del suono* (o semplicemente *velocità*

critica). Sostituendo la (1.6.4) nella (1.6.1) si ottiene:

$$c^* = \sqrt{\frac{2}{k+1} kRT_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} c_0 \quad (1.6.5)$$

La velocità critica del suono dipende dalle condizioni di ristagno e dalle caratteristiche fisiche del gas.

Si può fare riferimento alla *temperatura critica* T^* :

$$T^* = \frac{c^{*2}}{kR} \quad (1.6.6)$$

che per la (1.5.4) è legata alla temperatura di ristagno dall'espressione ($M = 1$ nello stato critico):

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} \quad (1.6.7)$$

Dal confronto della (1.5.4) e (1.6.7) si ottiene una relazione tra la temperatura critica e la temperatura statica del fluido:

$$\frac{T^*}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \quad (1.6.8)$$

Così tramite la (1.6.8) la temperatura in una qualsiasi sezione può essere facilmente dedotta da quella in un'altra sezione solamente dalla conoscenza dei corrispondenti numeri di Mach.

Tutti gli stati dinamici possibili per un gas ideale in un tubo di flusso a regime permanente,

come risulta dall'equazione adiabatica dell'energia, possono essere rappresentati in un diagramma (u, c) dalla curva dell'ellisse di fig. 1.6.1.

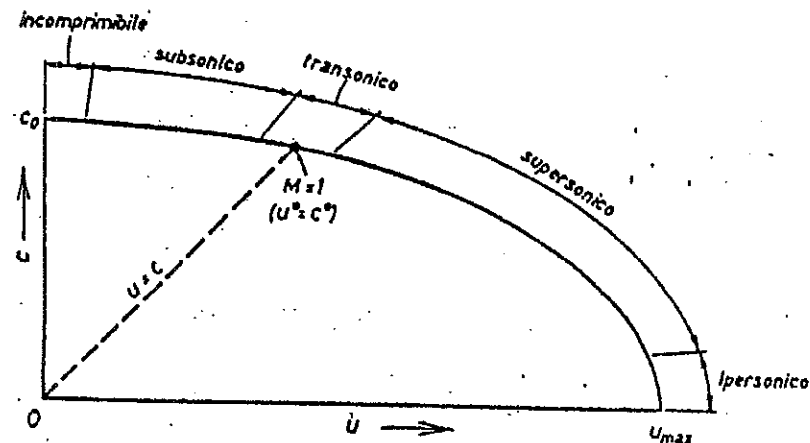


Fig. 1.6.1. - Ellisse rappresentante i diversi regimi di moto per un gas ideale che evolve adiabaticamente.

Il numero di Mach locale dipende sia dalla velocità del fluido che dalla velocità del suono nella medesima sezione di deflusso. Ma la velocità locale del suono varia con lo stato termodinamico del fluido, in particolare con la sola temperatura per un gas ideale; può essere utile introdurre un parametro ancora adimensionale ma funzione della sola velocità locale del fluido. Tale parametro può essere il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità critica del suono che è una costante per il moto adiabatico; esso verrà chiamato *numero di Mach critico* ed indicato con il simbolo \bar{M} :

$$\bar{M} = \frac{u}{c^*}$$

(1.6.9)

La relazione tra il numero di Mach critico \bar{M} e quello locale M si ottiene da:

$$\bar{M}^2 = \frac{u^2}{c^{*2}} = \frac{u^2}{c^2} \frac{c^2}{c_0^2} \frac{c_0^2}{c^{*2}} = \frac{u^2}{c^2} \frac{T}{T_0} \frac{c_0^2}{c^{*2}} \quad (1.6.10)$$

e per le (1.4.8), (1.5.4) e (1.6.5):

$$\bar{M}^2 = \frac{k+1}{2} \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (1.6.11)$$

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\bar{M}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \bar{M}^2} \quad (1.6.12)$$

Confrontando la (1.6.11) e la (1.6.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} M = 0 & \quad \text{per} \quad \bar{M} = 0 \\ M < 1 & \quad \text{"} \quad \bar{M} < 1 \\ M = 1 & \quad \text{"} \quad \bar{M} = 1 \\ M > 1 & \quad \text{"} \quad \bar{M} > 1 \\ M \rightarrow \infty & \quad \text{"} \quad \bar{M} \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Quindi il numero di Mach critico risulta minore o maggiore dell'unità come lo stesso numero di Mach locale e presenta inoltre il vantaggio di assumere un valore finito al tendere di M all'infinito.

Per l'aria ($k = 1,4$) le (1.6.11) e (1.6.12) diventano:

$$\bar{M}^2 = \frac{6}{5} \frac{M^2}{1 + \frac{M^2}{5}}; \quad M^2 = \frac{5}{6} \frac{\bar{M}^2}{1 - \frac{\bar{M}^2}{6}} \quad (1.6.14)$$

PROBLEMA 1.6.1

In un condotto orizzontale viene espansa adiabaticamente dell'aria (a comportamento ideale con $k = 1,4$). In una prima sezione del condotto si ha:

$$A_1 = 90 \text{ cm}^2, \quad p_1 = 40 \text{ psia}, \quad T_1 = 300 \text{ °K}, \quad M_1 = 0,5$$

ed in una sezione a valle della prima:

$$p_2 = 30 \text{ psia}, \quad M_2 = 0,8.$$

Calcolare:

a) i valori di T_0 , c_0 , u_{\max} , c^* e T^* nelle due sezioni;

b) l'area della seconda sezione.

Nella prima sezione:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 = 1 + 0,2 \cdot 0,5^2 = 1,05$$

e nella seconda:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 = 1 + 0,2 \cdot 0,8^2 = 1,128.$$

Poiché il moto è adiabatico si ha:

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = 1,05 \cdot 300 = 315 \text{ °K} \quad ***$$

da cui:

$$T_2 = \frac{315}{1,128} = 279,25 \text{ °K}$$

e quindi:

$$c_0 = c_{01} = c_{02} = \sqrt{kRT_0} = \sqrt{1,4 \frac{8317}{28,97} \cdot 315} = 355,8 \text{ m/sec} \quad ***$$

e per le (1.6.3), (1.6.5) e (1.6.7):

$$u_{\max} = \sqrt{5} c_0 = 793,4 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$c^* = \sqrt{\frac{5}{6}} c_0 = 323,8 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$T^* = 0,833 T_0 = 262,4 \text{ °K}. \quad ***$$

Applicando l'equazione di continuità (1.3.5) si ricava l'area della seconda sezione:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} A_1 \\ &= \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} \cdot \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} A_1 \\ &= \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} A_1 \\ &= \frac{0,5}{0,8} \cdot \frac{40}{30} \cdot \left(\frac{279,25}{300}\right)^{1/2} \cdot 90 = 72 \text{ cm}^2 \quad *** \end{aligned}$$

25 °K

$$\frac{317}{8,97} \cdot 315 =$$

3,8 m/sec ***

3,4 m/sec ***

3,8 m/sec ***

2,4 °K. ***

uità (1.3.5) si

:

cm²

CAPITOLO II

ONDE D'URTO NORMALI

2.1 GENERALITÀ.

Le proprietà di un fluido in moto a regime permanente e con determinate condizioni al contorno non sempre variano in modo regolare e continuo. Si può avere la formazione di una cosiddetta *onda d'urto* ed allora tutte le proprietà termodinamiche e cinematiche variano con discontinuità attraverso il "fronte d'onda". Calcoli teorici e misure sperimentali mostrano che lo spessore di una onda d'urto normale è dello stesso ordine di grandezza del cammino libero medio delle molecole. Per questa ragione nello studio dell'onda di urto una discontinuità matematica sostituisce le sue caratteristiche interne e gli effetti dell'attrito e dello scambio di calore con le pareti del condotto possono essere completamente trascurati.

2.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI PER UN'ONDA D'URTO NORMALE.

Lo studio di un'onda d'urto che si propaga attraverso un gas in quiete può essere affrontato in modo analogo a quello dell'onda sonora, assumendo un sistema di riferimento solidale con il fronte d'onda (§ 1.4). L'onda d'urto stazionaria normale divide il campo di moto in due regioni le cui grandezze meccaniche e termodinamiche, come schematizzato in fig. 2.2.1, sono indicate rispettivamente con gli indici 1 e 2 a seconda che rappresentino stati del fluido a monte o a valle dell'onda d'urto.

Il volume di controllo, comprendente il fronte d'urto, può essere considerato di spessore infinitesimo nella direzione del moto e quindi con le due sezioni trasversali di eguale area. Poiché at-

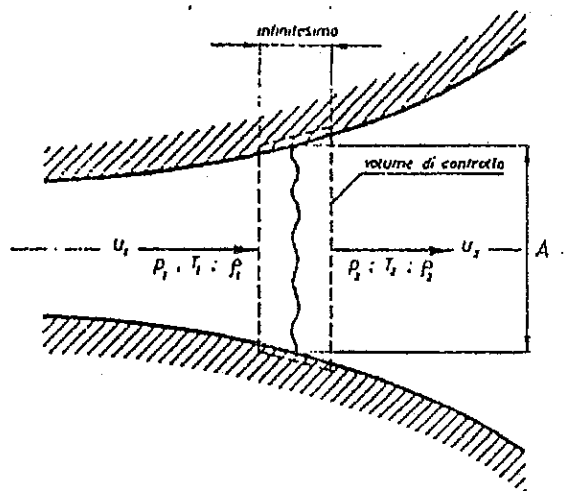


Fig. 2.2.1. - Volume di controllo per l'analisi di un'onda d'urto normale stazionaria.

traverso la superficie di controllo non si hanno scambi di calore e di lavoro le equazioni dell'energia (1.3.4), di continuità (1.3.5) e della quantità di moto (1.3.9) possono essere scritte nella forma:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 \quad (2.2.1)$$

$$u_1 \rho_1 = u_2 \rho_2 \quad (2.2.2)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.2.3)$$

Queste tre equazioni sono espresse in funzione delle quattro variabili u , p , ρ e h ed è perciò necessario conoscere l'equazione di stato del fluido affinché sia possibile determinarne le proprietà a valle, note quelle a monte dell'onda d'urto.

2.3 ONDA D'URTO NORMALE IN UN GAS IDEALE.

Dal confronto delle equazioni (2.2.2) e (2.2.3) si ha:

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \quad (2.3.1)$$

e introducendo l'espressione della velocità del suono per un gas ideale, $c = \sqrt{kp/\rho}$:

$$k(u_1 - u_2) = \frac{c_2^2}{u_2} - \frac{c_1^2}{u_1} \quad (2.3.2)$$

L'equazione adiabatica dell'energia di un gas ideale (1.6.1) applicata alle sezioni 1 e 2 a monte ed a valle dell'onda d'urto permette il calcolo delle corrispondenti velocità del suono:

$$c_1^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} u_1^2 \quad (2.3.3)$$

$$c_2^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} u_2^2 \quad (2.3.4)$$

che sostituite nella (2.3.2) danno l'equazione:

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{2}{k+1} c_0^2 = c^{*2} \quad (2.3.5)$$

e in funzione del numero di Mach critico:

$$\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = 1 \quad (2.3.6)$$

Le (2.3.5) e (2.3.6), note come *equazioni di Prandtl* o di *Meyer*, rappresentano le relazioni tra le velocità del fluido ed i numeri critici di Mach attraverso un'onda d'urto normale; la loro importanza sarà dimostrata nel paragrafo successivo.

La relazione tra i numeri di Mach a monte, M_1 , ed a valle, M_2 , dell'onda d'urto si ottiene sostituendo nella (2.3.6) le espressioni date dalla (1.6.11):

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \quad (2.3.7)$$

Questa relazione è di grande utilità per scrivere le equazioni fondamentali relative all'onda d'urto in forma da potere essere facilmente tabulate.

Per un gas ideale l'equazione dell'energia applicata, nelle condizioni di un'onda d'urto, agli stati 1 e 2 porge:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \quad (2.3.8)$$

e per la (2.3.7):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1\right)}{\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} M_1^2} \quad (2.3.9)$$

rapporto che può essere facilmente tabulato in funzione del numero di Mach M_1 a monte dell'onda d'urto, per i diversi valori di k .

Analogamente dall'equazione della quantità di moto (2.2.3), tenendo conto dell'espressione della

velocità del suono per un gas ideale, si ricava:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}$$

da cui, per la (2.3.7):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (2.3.10)$$

Dalle relazioni (2.3.9) e (2.3.10) e dall'equazione di stato si ottiene:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \quad (2.3.11)$$

La misura della irreversibilità in un processo d'urto è data dal rapporto delle pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \quad (2.3.12)$$

e poiché i rapporti a secondo membro possono essere espressi tramite la (1.5.6), la (2.3.10) e la (2.3.7) in funzione di M_1 , si ha:

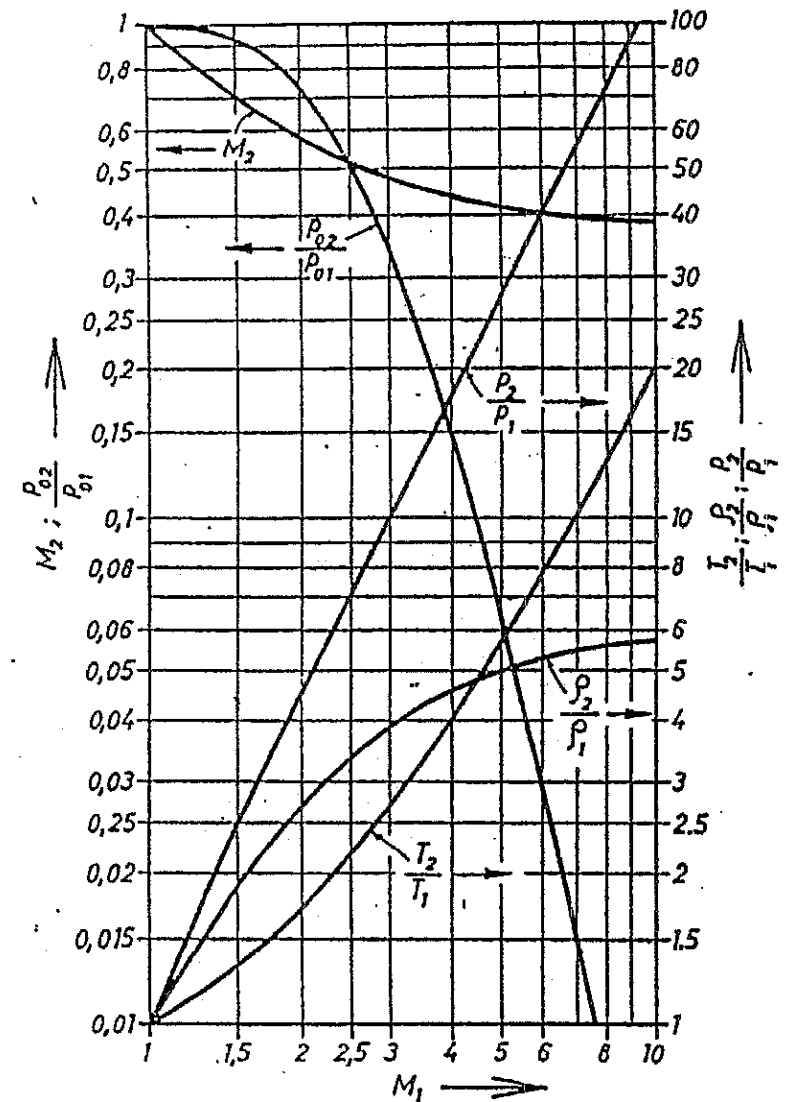
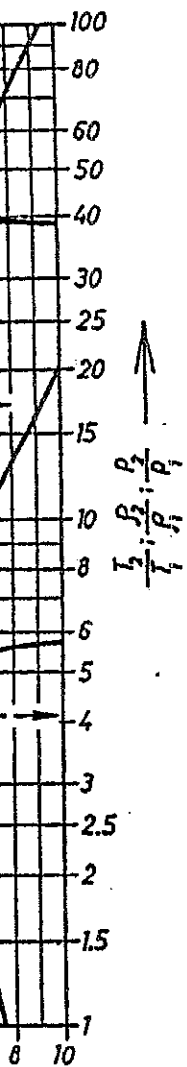


Fig. 2.3.1. - Funzioni dell'onda d'urto normale per un gas ideale con $k = 1,4$. I pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente a valori a monte e a valle del fronte d'onda.

47



per un gas l-
o rispettivamen-
e d'onda.

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{k/(k-1)} \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/(1-k)} \quad (2.3.13)$$

In conclusione i rapporti tra i valori delle varie grandezze a monte ed a valle dell'onda d'urto dipendono solamente dal valore del numero di Mach incidente M_1 . Essi sono tabulati, assieme alla relazione (2.3.7), in Appendice (B1, B2, B3) per alcuni valori k e diagrammati per gas ideale con $k = 1,4$ (aria) in fig. 2.3.1.

2.4 IMPOSSIBILITÀ DI UN'ONDA D'URTO DA MOTO SUBSONICO A SUPERSONICO.

Dalle relazioni di Prandtl (2.3.5) e (2.3.6), nell'ipotesi che si formi un'onda d'urto ($u_2 \neq u_1$), si deduce che risulta $\bar{M}_2 < 1$ se $\bar{M}_1 > 1$ e $\bar{M}_2 > 1$ se $\bar{M}_1 < 1$; cioè per le (1.6.13) un moto inizialmente supersonico diventa subsonico a valle dell'onda d'urto e viceversa. Si dimostrerà ora (solo per gas ideali, ma la conclusione è più generale) che il Secondo Principio della Termodinamica elimina questa seconda alternativa, cioè la possibilità di avere un'onda d'urto quando il moto è inizialmente subsonico.

La variazione dell'entropia attraverso un'onda d'urto normale è data per i gas ideali dall'espressione:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = R \ln \left[\frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \right] \quad (2.4.1)$$

e poiché $s_2 = s_{02}$ e $s_1 = s_{01}$, per definizione dello stato di ristagno, si ha:

$$s_2 - s_1 = R \ln \left[\frac{p_{01}}{p_{02}} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{k/(k-1)} \right] \quad (2.4.2)$$

Il processo attraverso l'onda d'urto è adiabatico, cioè $T_{02} = T_{01}$, e quindi la variazione di entropia specifica per la (2.3.13) diventa:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} + \frac{1}{k-1} \ln \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1} \quad (2.4.3)$$

L'equazione (2.4.3), rappresentata graficamente per i gas ($1 < k < 1,67$) in fig. 2.4.1, mostra che la variazione di entropia tra monte e valle dell'onda d'urto è positiva se $M_1 > 1$ e negativa se $M_1 < 1$. Poiché per il Secondo Principio della Termodinamica l'entropia di un sistema adiabatico non può diminuire è così dimostrato che per un gas ideale l'onda d'urto è possibile solo al passare da velocità supersoniche a velocità subsoniche. Ciò comporta un aumento di pressione e quindi la im-

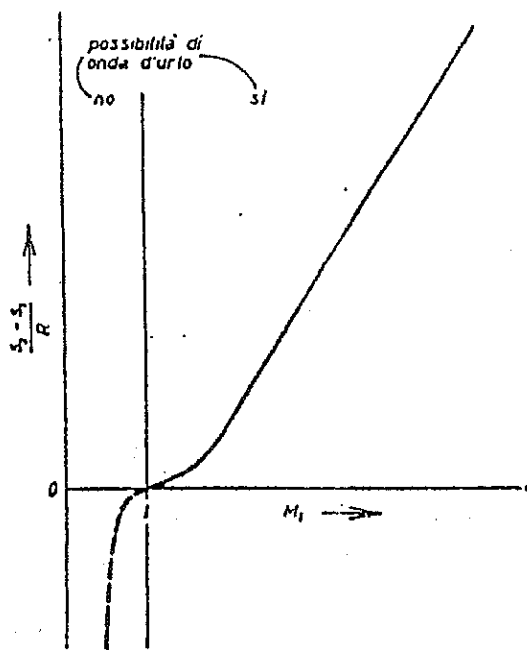


Fig. 2.4.1. - Variazione dell'entropia attraverso l'onda d'urto normale in funzione del valore del numero di Mach M_1 a monte.

possibilità che l'onda d'urto normale sia un'onda di espansione.

Attraverso l'onda d'urto di compressione, come illustrato in fig. 2.3.1, anche la temperatura e la densità aumentano mentre diminuisce la pressione di ristagno a causa dell'aumento di entropia.

Una interessante relazione tra il rapporto delle densità e quello delle pressioni si ottiene dalle (2.3.10) e (2.3.11):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{k+1}{k-1}} \quad (2.4.4)$$

La (2.4.4), nota come *equazione di Rankine-Hugoniot*, mette in evidenza la relazione esistente tra $\frac{p_2}{p_1}$ e $\frac{p_2}{p_1}$ in un processo di compressione adiabatico ed irreversibile quale quello dell'onda d'urto. Il confronto con la compressione isentropica è illustrato, per un gas biatomico ($k = 1,4$), in fig. 2.4.2.

Si può osservare che per la compressione di

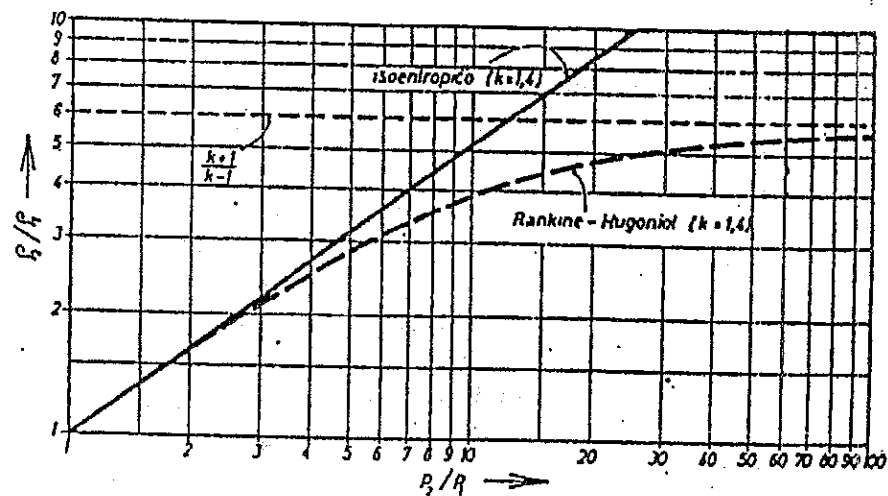


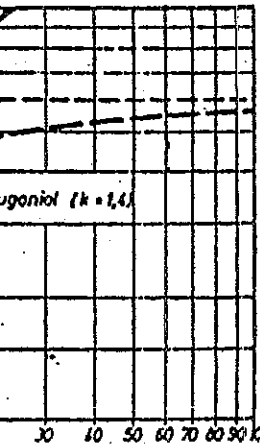
Fig. 2.4.2. - Confronto tra i processi di compressione attraverso un'onda d'urto normale (equazione di Rankine-Hugoniot) e in un processo isentropico per un gas ideale con $k = 1,4$.

51

(2.4.4)

ne di Rankine-
azione esistente
compressione a-
uello dell'onda
essione isoentro-
omico ($k = 1,4$),

compressione di



ione attraverso un'onda
in un processo isoentro-
1,4.

urto, a differenza di quanto avviene per quella i-
soentropica, il rapporto delle densità $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ è limita-
to al valore $\frac{k+1}{k-1}$ corrispondente ad un rapporto
infinito di $\frac{p_2}{p_1}$. Inoltre le due curve sono quasi coin-
cidenti per valori di $\frac{p_2}{p_1}$ prossimi all'unità: ciò si-
gnifica che il processo attraverso una debole onda
d'urto, cioè di piccola perturbazione in pressione,
è "quasi," isoentropico.

PROBLEMA 2.4.1

Una portata d'aria ($k = 1,4$) fluente in un con-
dotto a $M = 2$ e con pressione e temperatura e-
guali rispettivamente a 1 ata ed a 15°C subisce
un'onda d'urto normale.

Determinare (ipolizzando comportamento idea-
le):

- la pressione di ristagno e la velocità dell'a-
ria a valle dell'onda d'urto;
- la variazione di entropia attraverso l'onda
d'urto.

Dalla tabella A2 dell'Appendice si ha in cor-
rispondenza, a $M_1 = 2$:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0,12780$$

da cui:

$$p_{01} = \frac{1}{0,12780} = 7,82472 \text{ ata}$$

e dalla tabella B2:

$$M_2 = 0,57735$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,72088$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1,6875.$$

a) Si ha quindi:

$$p_{02} = p_{01} \cdot 0,72088 = 5,640 \text{ ata} \quad ***$$

$$T_2 = T_1 \cdot 1,6875 = 486,25 \text{ K}$$

La velocità del suono risulta:

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \frac{442}{373,16} \text{ m/s} \quad \text{***}$$

da cui:

$$u_2 = M_2 c_2 = \frac{255}{215,7} \text{ m/s} \quad \text{***}$$

b) La variazione di entropia è data dalla:

$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{1,987}{28,97} \ln \frac{7,8247}{5,640} = 0,0224 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad \text{***}$$

$$= 287 \ln \frac{1}{0,72088} = 93,93 \text{ J/(kg K)}$$

CAPITOLO III

MOTO ISOENTROPICO

Il moto adiabatico di un fluido in un condotto quando sia trascurabile l'effetto delle forze dissipative può essere considerato, in prima approssimazione, *reversibile* e quindi *isoentropico*. L'ipotesi di reversibilità per il moto adiabatico non solo è di grande utilità per la risoluzione analitica di molti problemi ma presenta soprattutto un termine di confronto per situazioni reali di deflusso.

3.1 MOTO ISOENTROPICO IN CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE. TEOREMA DI HUGONIOT.

L'equazione monodimensionale di continuità, per il moto a regime permanente di un fluido in un tubo di flusso, può essere applicata al moto in condotti nelle ipotesi che la velocità, pressione, densità e temperatura si possano considerare costanti attraverso ciascuna sezione.

In termini differenziali le equazioni di conservazione di massa e dell'energia per il moto adiabatico ($\delta L' = g \cdot dz = 0$) sono rispettivamente:

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$dh = -\frac{du^2}{2} = -u \cdot du \quad (3.1.2)$$

Dalla relazione termodinamica:

$$T \cdot ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (3.1.3)$$

si ha per il moto isoentropico:

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad (3.1.4)$$

e quindi dalla (3.1.2):

$$u \cdot du = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.1.5)$$

dove s è l'entropia specifica del fluido.

Eliminando il rapporto $\frac{d\rho}{\rho}$ tra la (3.1.1) e la (3.1.5) si ha:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} \left[\frac{u^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} - 1 \right] \quad (3.1.6)$$

e introducendo il numero di Mach:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} (M^2 - 1) \quad (3.1.7)$$

La (3.1.7), nota come *equazione di Hugoniot*, è fondamentale per il moto isoentropico monodimensionale e non dipende dalla natura del fluido, gas ideale o no. Da notare che per un fluido incompressibile la velocità del suono è infinita ($d\rho = 0$) e la (3.1.7) si riduce alla semplice relazione $uA = \text{costante}$ qualunque sia la velocità del fluido.

Analogamente dal confronto delle (3.1.5) e (3.1.7) si ottengono le variazioni dell'area della sezione trasversale in funzione delle variazioni di pressione e densità:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dp}{\rho u^2} (M^2 - 1) \quad (3.1.8)$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \frac{M^2 - 1}{M^2} \quad (3.1.9)$$

e riassumendo:

1) *moto subsonico* ($M < 1$):

$$\begin{aligned} dA > 0 &\text{ implica } du < 0, dp > 0, d\rho > 0 \\ dA < 0 &\text{ implica } du > 0, dp < 0, d\rho < 0. \end{aligned}$$

2) *moto supersonico* ($M > 1$):

$$\begin{aligned} dA > 0 &\text{ implica } du > 0, dp < 0, d\rho < 0 \\ dA < 0 &\text{ implica } du < 0, dp > 0, d\rho > 0. \end{aligned}$$

L'impiego delle equazioni (3.1.7), (3.1.8) e (3.1.9) è utile al dimensionamento di ugelli e dif-

fusori. Un *ugello* è un condotto che permette di ottenere un incremento nella velocità del fluido a spese di una diminuzione della pressione, e quindi dovrà essere convergente nel moto subsonico e divergente in quello supersonico.

Un *diffusore* invece è un condotto attraverso il quale il fluido viene decelerato con recupero di pressione e quindi avrà la forma di un convergente nel moto supersonico e di un divergente in quello subsonico (fig. 3.1.1).

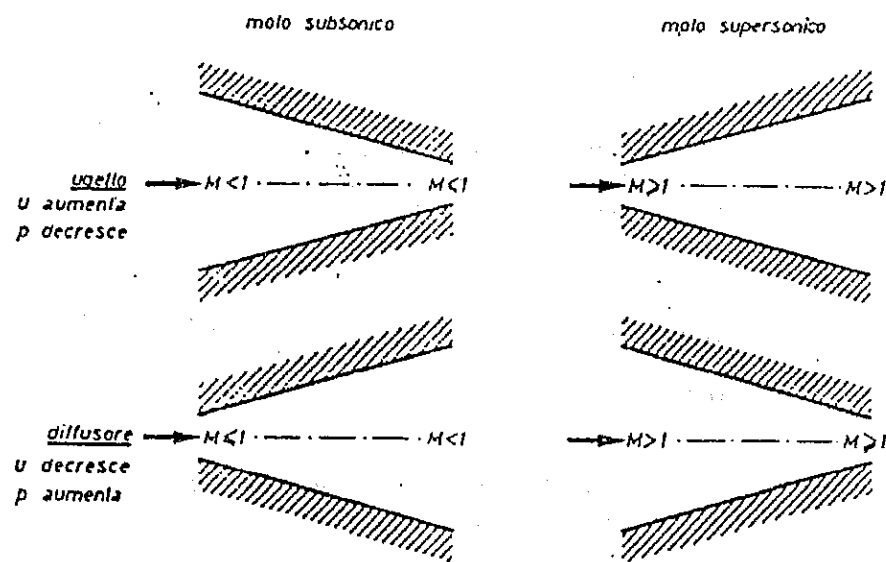


Fig. 3.1.1. - Effetto delle variazioni di area della sezione normale del condotto nel moto isoentropico in regime subsonico e supersonico.

Quando il moto è *sonico* ($M = 1$) in accordo alla (3.1.7) e nell'ipotesi che non ci siano discontinuità nella velocità ($\frac{du}{dx}$ diversa da infinito) si ot-

tiene $\frac{dA}{dx} = 0$. La velocità locale del fluido può quindi essere eguale a quella del suono solo in una sezione del tubo di flusso avente area minima (l'alternativa di un'area massima viene esclusa da quanto dimostrato in precedenza).

Il reciproco di tale proprietà può non essere vero: infatti in una sezione di area minima, chiamata comunemente "gola", si può avere $M \neq 1$; dovrà allora essere $du/dx = 0$. Se si considera l'esempio illustrato in fig. 3.1.2 del convergente divergente con moto subsonico all'imbocco si presentano due alternative:

a) nella sezione di gola A_g la velocità locale del fluido eguaglia quella locale del suono. In questo caso nel divergente il moto può essere supersonico (curva a) o subsonico (curva b) a seconda delle condizioni di pressione allo sbocco del condotto;

b) nella sezione di gola la velocità può essere minore di quella del suono. In A_g si ha allora $M < 1$ ed il deflusso è completamente subsonico (curva c).

Considerazioni analoghe alle precedenti rivelano anche nel caso di moto inizialmente supersonico la possibilità di avere nella sezione di gola $M \neq 1$.

Concludendo, nella ipotesi di un deflusso continuo il passaggio da moto subsonico a moto supersonico (e viceversa) può avvenire solo nella sezione di gola.

Il fluido può
non solo in u-
area minima
ne esclusa da

non essere
minima, chia-
re $M \neq 1$; do-
considera l'e-
convergente di-
ococco si pre-

velocità locale
suono. In que-
essere super-
b) a seconda
ococco del con-

rità può esse-
g si ha allora
nte subsonico

ecedenti rive-
amente superso-
zione di gola

deflusso con-
a moto super-
solo nella se-

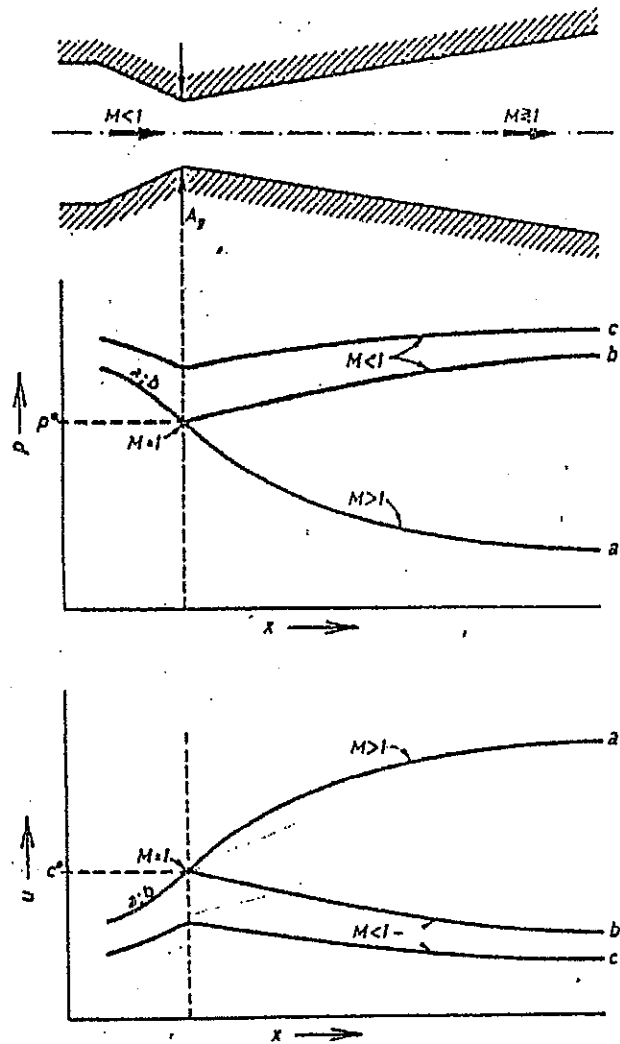


Fig. 3.1.2. - Possibili profili di velocità e pressione in un condotto convergente-divergente con regime di moto subsonico all'imbocco.

3.2 LO STATO CRITICO * DI RIFERIMENTO PER GAS IDEALI.

Nel paragrafo 1.6 si è definita la velocità critica del suono c^* e da essa la temperatura critica T^* (gas ideali):

$$\frac{T^*}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \quad (1.6.8)$$

La temperatura critica dedotta con la sola condizione di adiabaticità non è di per sé sola sufficiente a definire uno stato termodinamico. A tal fine, come già per lo stato di ristagno, una ulteriore condizione deve essere imposta al processo: cioè quella "isoentropica". Lo stato critico è allora definito come lo stato corrispondente a $M = 1$ che a partire dalle condizioni locali viene raggiunto isoentropicamente. La pressione critica p^* espressa in funzione del numero di Mach locale e del valore della pressione locale risulta:

$$\frac{p^*}{p} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{k/(k-1)} \quad (3.2.1)$$

Analogamente utilizzando l'equazione isoentropica si ricava la densità critica ρ^* dal valore del

numero di Mach locale e della densità locale:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/(k-1)} \quad (3.2.2)$$

Se il moto è isoentropico T^* , p^* e ρ^* hanno valore costante in ogni punto mentre se esso è adiabatico non reversibile la sola T^* è costante.

Le relazioni tra i valori dei parametri allo stato critico e allo stato di ristagno si ottengono dalle (1.5.4), (1.5.6) e (1.5.8) per $M = 1$ oppure dalle (1.6.8), (3.2.1) e (3.2.2) per $M = 0$:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (3.2.5)$$

e per l'aria ($k = 1,4$) diventano:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \quad (3.2.6)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,5283 \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,6339 \quad (3.2.8)$$

Per il moto a regime permanente di un fluido in un tubo di flusso è possibile pure ricavare una relazione tra il numero di Mach e l'area della sezione trasversale espressa adimensionalmente. Ciò implica la scelta dell'area di riferimento il cui valore A^* , relativo allo stato critico $M = 1$, è costante per ogni moto isoentropico. Dall'equazione di continuità si ha:

$$A u \rho = A^* u^* \rho^* = A^* c^* \rho^*$$

da cui:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{c^*}{u} \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho}$$

e per le (1.6.11) e (3.2.2):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/(k-1)}$$

cioè:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.2.9)$$

(3.2.7)

(3.2.8)

nte di un fluido
e ricavare una
area della se-
cionalmente. Ciò
mento il cui va-
o $M = 1$, è co-
Dall'equazione

$c^* p^*$

$\frac{p^*}{p}$

$$\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{1/(k-1)}$$

$\frac{k+1}{(k-1)}$

(3.2.9)

I valori del rapporto $\frac{A}{A^*}$ sono tabulati in Ap-
pendice (A1, A2, A3) e diagrammati in fig. 3.2.1
in funzione del numero di Mach per differenti va-
lori di k ; si vede che il valore di k influenza in
modo determinante il rapporto $\frac{A}{A^*}$ solo ad eleva-
ti numeri di Mach. Le curve presentano un mini-
mo in corrispondenza alla sezione $A = A^*$ in cui
 $M = 1$; per ogni altro valore del rapporto $\frac{A}{A^*} > 1$
si hanno due valori di M : uno per il regime di mo-
to subsonico ed uno per regime di moto superso-
nico. In accordo con quanto dedotto dall'equazione

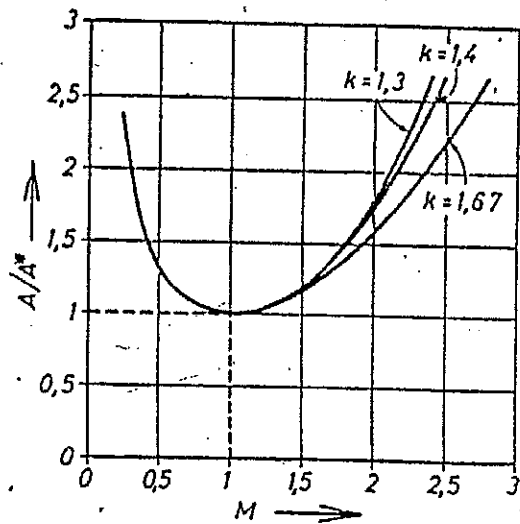


Fig. 3.2.1. - Rapporto $\frac{A}{A^*}$ in funzione del
numero di Mach per il moto isoentropico di
gas ideali a differenti valori di k .

di Hugoniot, si ha che nel moto isoentropico in un
condotto a sezione variabile per aumentare il nu-
mero di Mach l'area della sezione trasversale de-
ve diminuire (nel senso del deflusso) a velocità
subsoniche ed aumentare a velocità supersoniche
(e viceversa, per diminuire il numero di Mach).

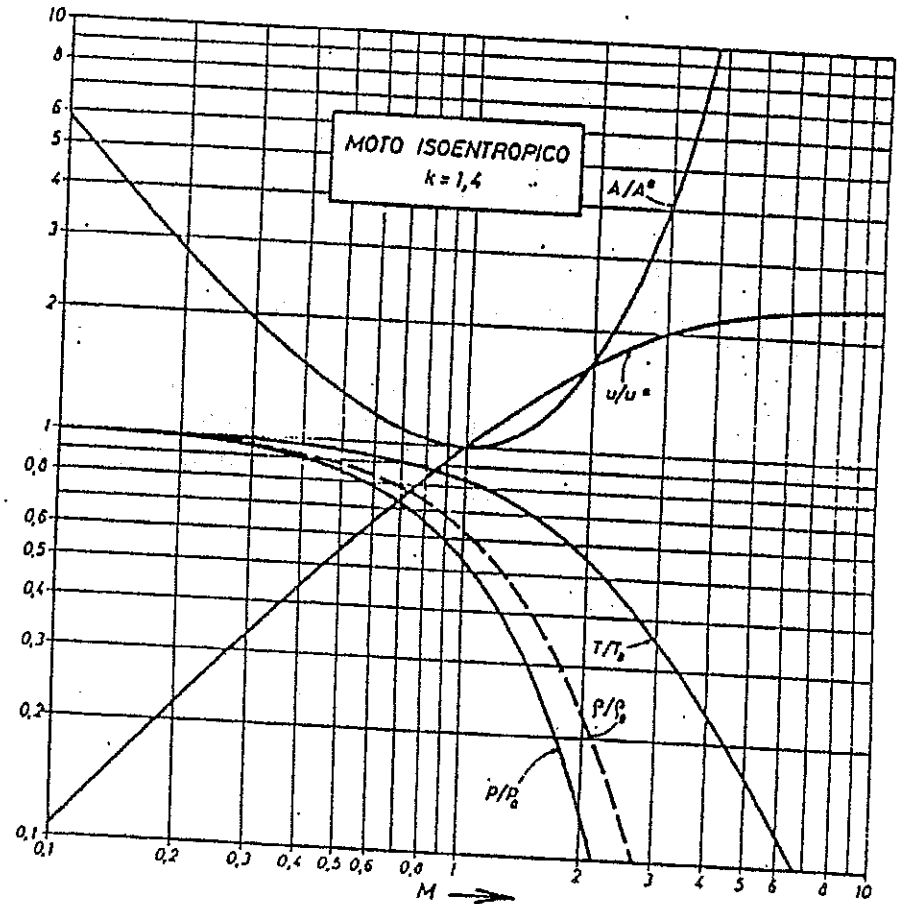


Fig. 3.2.2. - Funzioni del moto isoentropico e delle proprietà di ristagno per un gas ideale con $k=1,4$.

Un diagramma riassuntivo dei valori dei rapporti $\frac{A}{A^*}$, $\frac{u}{u^*}$, $\frac{p}{p_0}$, $\frac{T}{T_0}$ e $\frac{\rho}{\rho_0}$ in funzione del numero di Mach è dato in fig. 3.2.2 per un gas ideale con $k = 1,4$.

PROBLEMA 3.2.1

Un gas a comportamento ideale ($k = 1,4$) fluisce isoentropicamente in un condotto. In un dato punto l'area della sezione trasversale è di 100 cm^2 ed il corrispondente numero di Mach è $M_1 = 0,5$. Determinare:

- l'area della sezione trasversale del condotto nella quale il numero di Mach è uguale a 2;
- il numero di Mach in due sezioni trasversali la cui area è di $149,64 \text{ cm}^2$ e di 70 cm^2 rispettivamente.

Dalla tabella A2 dell'Appendice si ottiene in corrispondenza a $M_1 = 0,5$:

$$\frac{A_1}{A_1^*} = 1,34$$

da cui:

$$A_1^* = \frac{A_1}{1,34} = 74,638 \text{ cm}^2.$$

- a) In corrispondenza a $M_2 = 2$ si ha:

$$\frac{A_2}{A_2^*} = 1,687$$

e poiché il moto è isoentropico $A_2^* = A_1^* = A^*$:

$$A_2 = A^* \cdot 1,687 = 125,95 \text{ cm}^2. \quad ***$$

- b) Ancora dalla tabella A2, essendo:

$$A_2 = 149,64$$

e quindi:

$$\frac{A_2}{A^*} = 2,005$$

si ottengono in corrispondenza due valori di M :

$$M_2 = 2,2 \quad ***$$

$$M_2 = 0,305. \quad ***$$

Se non si hanno altre informazioni entrambe le soluzioni sono possibili. È chiaro che se $M_2 = 2,2$ è necessario che nel condotto esista un'area di gola eguale ad A^* .

Invece per $A_2 = 70 \text{ cm}^2$ risulta:

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{70}{74,638} < 1,$$

ma nel moto isoentropico il rapporto $\frac{A}{A^*}$ deve essere maggiore dell'unità e quindi in questo caso nessuna soluzione è possibile.

3.3 MASSIMA PORTATA SPECIFICA.

L'equazione di continuità espressa mediante i parametri allo stato critico, che conservano valore costante in ogni moto isoentropico, si può scrivere nella forma:

$$W = u\rho A = u^*\rho^*A^* = \sqrt{kRT^*}\rho^*A^* \quad (3.3.1)$$

da cui per la (3.2.3), la (3.2.5) e l'equazione di stato di un gas ideale si ottiene:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\left(\frac{A}{A^*}\right)} \quad (3.3.2)$$

e per la (3.2.9):

$$\frac{W}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (3.3.3)$$

relazione che esprime la portata specifica in funzione dello stato di ristagno e del numero di Mach. I risultati di prove sperimentali, ad esempio su compressori e turbine, possono essere così generalizzati a condizioni di temperatura e pressione differenti da quelle di prova se si assume come variabile del moto il gruppo adimensionale $\frac{W}{A} \frac{\sqrt{RT_0}}{p_0}$.

La condizione per cui la portata specifica risulta massima si ottiene eguagliando a zero la de-

rivata $d\left(\frac{W}{A}\right)/dM$. Direttamente dalla (3.3.2) risulta l'espressione di $\left(\frac{W}{A}\right)_{\max}$ in corrispondenza al valore $A = A^*$, cioè $M = 1$, che rende minimo il rapporto $\frac{A}{A^*}$:

$$\left(\frac{W}{A}\right)_{\max} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.3.4)$$

La massima portata specifica si ha nella sezione di area minima A^* nella quale il numero di Mach è unitario; essa dipende, per un fissato stato di ristagno, solo dal tipo di gas. Cioè per una data portata esiste una sezione di area minima A^* attraverso la quale il deflusso può essere isoentropico, con stato di ristagno fissato.

Tramite la (1.5.6) la portata di massa per unità di area viene espressa in funzione della pressione locale in ogni sezione del moto dall'equazione di St. Venant-Wantzel:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/k} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (3.3.5)$$

La rappresentazione analitica della (3.3.5) mostra che la portata attraverso una fissata area di passaggio si annulla quando la pressione locale p

viene ridotta a zero. Questo risultato, fisicamente inconcepibile, pone il problema dei limiti di validità della (3.3.5) nelle sue applicazioni. Ad esempio in questo caso è lecito porre la condizione che la pressione statica in una data sezione trasversale possa essere ridotta isoentropicamente a zero?

Il problema sarà trattato nel prossimo paragrafo che descrive le caratteristiche del moto in un ugello convergente di fissata geometria per diverse condizioni di prova.

PROBLEMA 3.3.1.

In una galleria a vento supersonica fluisce una portata d'aria (a comportamento ideale, $k = 1,4$) proveniente da un serbatoio alla pressione di 1,5 ata e alla temperatura di 25°C come illustrato in fig. 3.3.1 P.

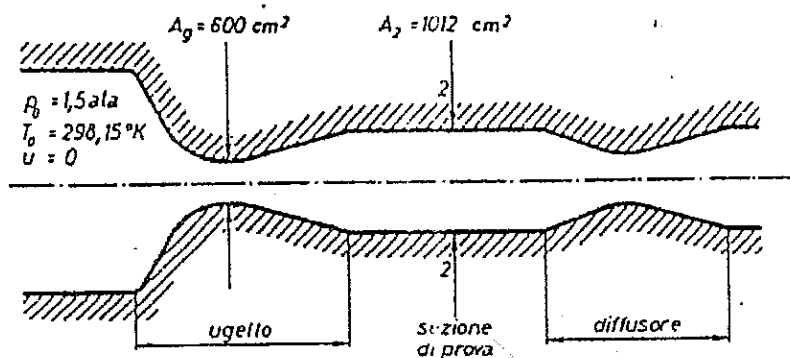


Fig. 3.3.1 P. - Problema 3.3.1.

Determinare la portata d'aria fluente e il suo stato nella sezione di gola dell'ugello, la cui area è di 600 cm^2 , e in quella di prova ove il numero di Mach vale $M = 2$; determinare inoltre l'area della sezione di prova.

Poiché l'ugello che alimenta il condotto di prova è supersonico la massima portata specifica si ha in corrispondenza alla sezione di gola $A_g = A^*$; il valore della portata risulta perciò dato dalla (3.3.4):

$$W = A_g \sqrt{\frac{k}{R}} \cdot \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 20,65 \text{ kg/sec} \quad ***$$

Determinato:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = 1,718 \text{ kg/m}^3$$

dalle funzioni delle proprietà di ristagno (tabella A2) si ricavano le proprietà del fluido in corrispondenza a $M = 1$ e $M = 2$.

Per $M = 1$ si ricava:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \quad \text{da cui} \quad T^* = 248,44 \text{ K} \quad ***$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,52828 \quad \rightarrow \quad p^* = 0,79 \text{ ata} \quad ***$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,63394 \quad \rightarrow \quad \rho^* = 1,089 \text{ kg/m}^3 \quad ***$$

71

e analogamente in corrispondenza a $M = 2$:

$$T_2 = T_0 \cdot 0,55556 = 165,64 \text{ °K} \quad ***$$

$$p_2 = p_0 \cdot 0,1278 = 0,19 \text{ ata} \quad ***$$

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot 0,23005 = 0,395 \text{ kg/m}^3 \quad ***$$

$$A_2 = A_g \cdot 1,6875 = 1012,5 \text{ cm}^2. \quad ***$$

3.4 UGELLO CONVERGENTE.

Il termine ugello fa sempre riferimento ad un condotto che accelera il moto indipendentemente dalla forma geometrica dello stesso. Se si tratta di un semplice convergente il moto risulta ovunque subsonico e perciò in assenza di onde d'urto.

Si consideri una sezione del condotto avente una area di dimensioni tali che la velocità locale del fluido possa ivi essere assunta eguale a zero. Anche se tale sezione non esiste nei casi reali ad essa si può sempre fare riferimento in quanto note le proprietà locali (p, T, u) di uno stato del moto sono pure determinate quelle dello stato di ristagno (p_0, T_0) ad esso associato.

La fig. 3.4.1 rappresenta un ugello convergente che espande isoentropicamente un gas di note proprietà di ristagno, p_0 e T_0 (costanti), in un ambiente la cui pressione p_s può essere variata con continuità dal valore p_0 a zero.

Le figure 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 illustrano rispettivamente gli effetti delle variazioni di p_s nella distribuzione delle pressioni attraverso l'ugello, sul-

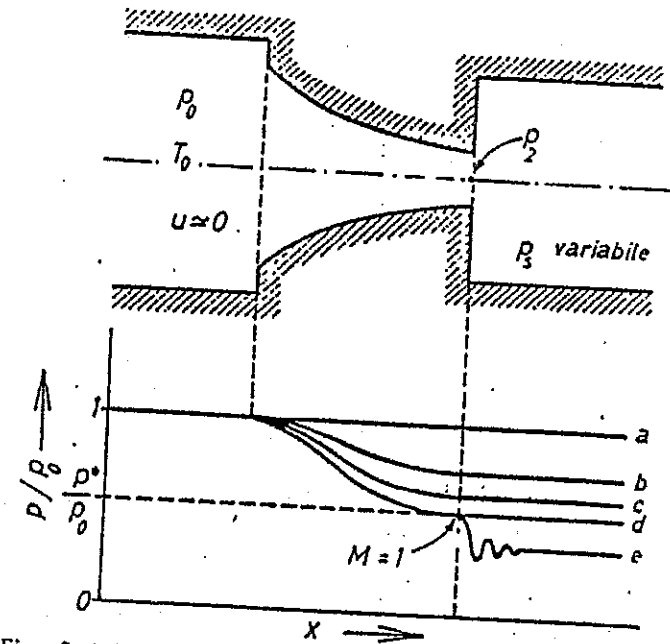


Fig. 3.4.1. - Ugello convergente nel quale un gas si espande isoentropicamente in diverse condizioni operative.

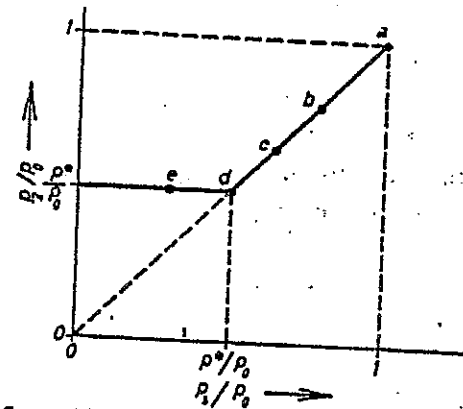


Fig. 3.4.2. - Effetto della variazione della pressione di scarico p_s sulla pressione nella sezione di uscita p_2 per l'ugello convergente di fig. 3.4.1.

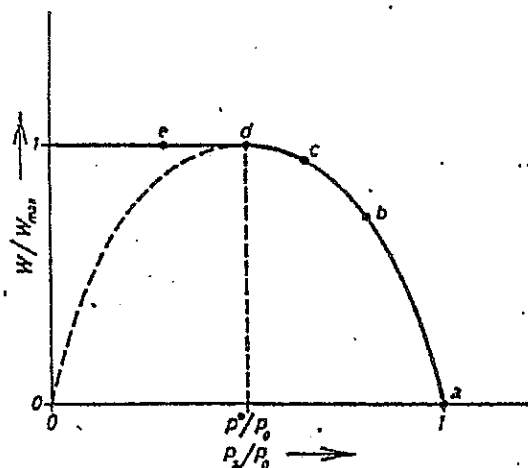


Fig. 3.4.3. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per l'ugello convergente di fig. 3.4.1.

la variazione della pressione e della portata nella sezione di uscita.

Se $p_s = p_0$ la pressione è costante attraverso l'ugello e non si ha deflusso (caso indicato dalla lettera a).

Se la pressione a valle p_s è ridotta ad un valore di poco inferiore a p_0 (caso b) si ha una diminuzione della pressione locale p lungo il convergente e poiché il moto è subsonico la pressione p_2 nella sezione di uscita è praticamente eguale a p_s .

La velocità in questa sezione per la (1.6.1) risulta:

$$u_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.4.1)$$

e la portata specifica per la (3.3.5) risulta:

$$\frac{W}{A_2} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (3.4.2)$$

Una ulteriore riduzione della pressione di scarico p_s (caso c) porta ad un aumento della velocità u_2 , della portata W ed una diversa distribuzione di pressione nell'ugello senza cambiare le caratteristiche del moto.

Il caso d si presenta quando:

$$p_s = p^* = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} p_0 \quad (3.4.3)$$

La velocità locale del fluido nella sezione di uscita eguaglia la velocità locale del suono:

$$u_2 = c^* = \sqrt{k p^* v^*} \quad (3.4.4)$$

e la portata specifica raggiunge il massimo valore:

$$\left(\frac{W}{A_2} \right)_{\max} = \frac{W_{\max}}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.4.5)$$

Se ora la pressione p_s viene ulteriormente diminuita (caso e) la distribuzione delle pressioni nell'ugello e la pressione nella sezione di uscita rimangono fisse ai valori del caso d; la pressione p_2 non può diventare minore di p^* perché in tal caso si dovrebbero realizzare velocità supersoni-

risulta:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.4.2)$$

pressione di sca-
della veloci-
distribuzio-
nbiare le ca-

$$(3.4.3)$$

a sezione di
suono:

$$(3.4.4)$$

simo valore:

$$\frac{k+1}{2(k-1)} \quad (3.4.5)$$

riormente di-
le pressioni
ne di uscita
la pressione
rché in tal
à supersoni-

che non compatibili per il moto isoentropico in un ugello convergente.

Viene così chiarito il quesito, posto alla fine del paragrafo precedente, sulla possibilità di ridurre isoentropicamente a zero la pressione locale statica di uscita in un ugello convergente e di ottenere una portata nulla. Se l'area A e la pressione p dell'equazione (3.3.5) sono considerate rispettivamente come A_2 e p_2 nell'ugello, la presente discussione mostra che p non può tendere a zero (anche se $p_s \rightarrow 0$) in quanto non può risultare minore di p^* che per una fissata pressione di ristagno (finita e non nulla) ha un valore costante diverso da zero.

Quando la pressione p_s viene resa minore di p^* (caso e) la pressione nella sezione di uscita dell'ugello rimane eguale a p^* e solo a valle si ha l'adeguamento esterno di pressione (onde di espansione). Anche la portata rimane "bloccata" al suo valore massimo; il tratto di curva tratteggiato $d0$ di fig. 3.4.3 ($p_s < p^*$) non corrisponde quindi ad alcuna situazione reale di deflusso e deve essere sostituito da quello orizzontale $d1$ luogo dei punti rappresentativi stati di portata massima.

3.5 UGELLO CONVERGENTE-DIVERGENTE.

Una discussione simile a quella del paragrafo precedente permette di determinare le caratteristiche del moto in ogni sezione di un ugello convergente-divergente di fissata geometria e in di-

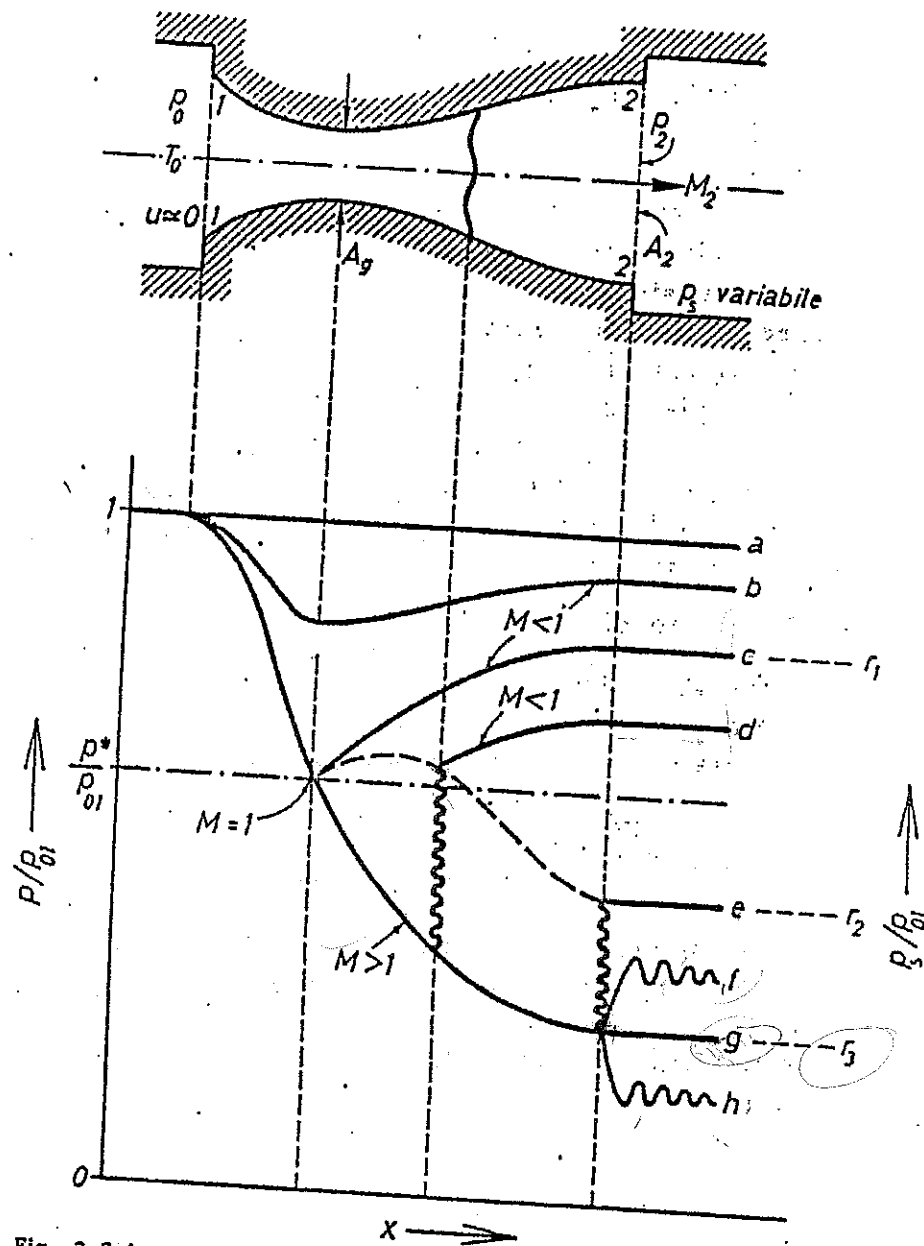


Fig. 3.5.1. - Ugello convergente-divergente nel quale un gas si espande isoentropicamente (con eventuale formazione di onde d'urto normali) in diverse condizioni operative.

verse condizioni operative.

Lo stato di ristagno all'imbocco (p_{01} , T_0) ⁽¹⁾ è supposto noto e costante mentre la pressione di scarico p_s è ridotta con continuità dal valore p_{01} a valori via via decrescenti; cfr. la fig. 3.5.1. Fino a che la pressione nella sezione di gola risulta maggiore di quella critica $p_g > p^*$ la velocità del fluido è ovunque minore di quella del suono ed il moto è completamente subsonico (caso b); il condotto si comporta più propriamente come un tubo di Venturi. Nella sezione di uscita A_2 la pressione è eguale a quella imposta $p_2 = p_s$ (fig. 3.5.2) e la portata espressa tramite la (3.3.5) risulta funzione del rapporto di pressione $\frac{p_2}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}}$ (fig. 3.5.3).

Quando $p_g = p^*$ (caso c) nella sezione di gola si raggiunge la velocità del suono, il numero di Mach è unitario e la portata risulta massima:

$$\left(\frac{W}{A_g}\right)_{\max} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.5.1)$$

Il moto nel convergente è ora completamente definito mentre il moto nel divergente dipende dalle condizioni imposte a valle.

Nel moto isoentropico dal confronto della (3.5.1) e (3.3.5) si ottiene:

⁽¹⁾ Si adotta la scrittura p_{01} per indicare la pressione di ristagno in quanto nel moto supersonico diventa possibile la presenza di un'onda d'urto che è accompagnata da una diminuzione della pressione di ristagno.

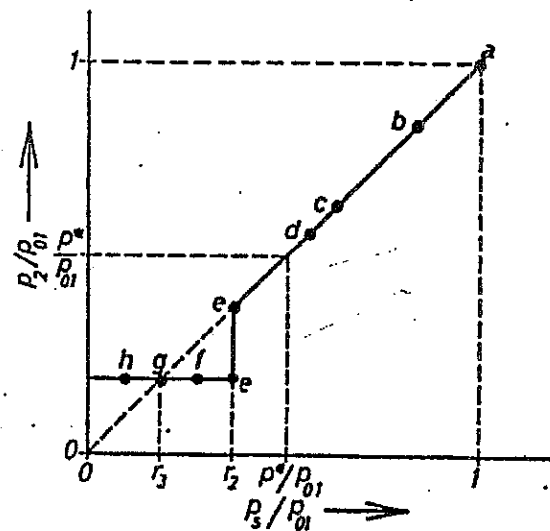


Fig. 3.5.2. - Effetto della variazione della pressione di scarico, p_s , sulla pressione nella sezione d'uscita p_2 per l'ugello convergente-divergente di fig. 3.5.1.

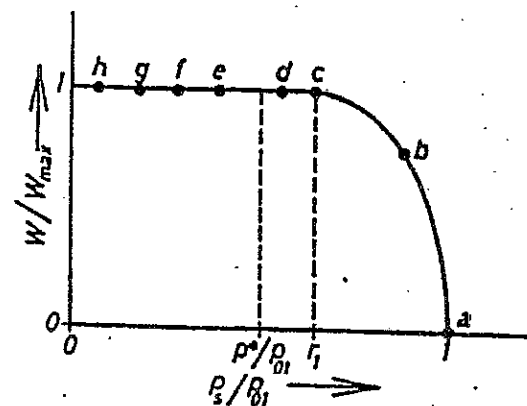


Fig. 3.5.3. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per l'ugello convergente-divergente di fig. 3.5.1.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A}{A_g} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \frac{k-1}{2}}{\left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad (3.5.2)$$

espressione che assieme alla (3.2.9) dà il rapporto $\frac{A}{A^*}$ in funzione di $\frac{p}{p_{01}}$ e del numero di Mach.

Ad ogni valore di $\frac{A}{A_g} = \frac{A}{A^*}$ nella sezione del divergente corrispondono due soluzioni isoentropiche, una di moto subsonico ed una di moto supersonico. Le curve denotate con le lettere c, g mostrano queste due soluzioni isoentropiche; in particolare nella sezione di uscita A_2 i rapporti di pressione $\frac{p_2}{p_{01}}$ (analoga osservazione per i numeri di Mach) assumono valori ben determinati, indicati in fig. 3.5.1 con i simboli γ_1 ed γ_3 e rispettivamente maggiore ($\gamma_1 > \frac{p^*}{p_{01}}$, $M_2 < 1$) e minore ($\gamma_3 < \frac{p^*}{p_{01}}$, $M_2 > 1$) del rapporto $\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p_g}{p_{01}}$.

Quando $\frac{p_s}{p_{01}}$ è compreso tra γ_1 ed γ_3 si ha una onda d'urto normale in una sezione del divergente (caso d) o onde di compressione oblique esternamente all'ugello (caso f).

Il confine tra queste due situazioni di moto è determinato dal rapporto di pressioni γ_2 a cui corrisponde un'onda d'urto normale nella sezione di

uscita del divergente (caso e). Il rapporto tra le pressioni a monte e a valle dell'onda d'urto, per la (2.3.10), risulta allora:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{2k}{k+1} M_{(\gamma_3)}^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (3.5.3)$$

dove $M_{(\gamma_3)}$ è il numero di Mach a monte dell'onda d'urto, corrispondente al cosiddetto rapporto delle "pressioni di progetto", γ_3 per l'ugello convergente-divergente (supersonico). I valori di γ_1 ed γ_3 subsonico e supersonico, corrispondenti a $\frac{A}{A^*} = \frac{A_2}{A_g}$ sono dati dalle funzioni per il moto isoentropico (tabelle A1, A2, A3).

La sezione trasversale del divergente in cui si forma l'onda d'urto dipende dal valore della pressione imposta a valle p_s . Per il caso d di fig. 3.5.1 il moto segue un tratto della curva isoentropica a regime supersonico ma in una certa posizione del divergente il processo d'urto (non isoentropico) riduce il moto a subsonico e la rimanente lunghezza agisce come un diffusore subsonico, nel quale il moto si può considerare ancora isoentropico, ma con valore minore della pressione di ristagno p_0 .

Al diminuire della pressione a valle p_s l'onda d'urto si allontana dalla sezione di gola spostandosi verso l'uscita dell'ugello; nel caso limite $\frac{p_s}{p_{01}} = \gamma_2$ l'onda d'urto si forma nella sezione di uscita (caso e).

	$r_1 < \frac{p_s}{p_{01}} < 1$	$r_2 < \frac{p_s}{p_{01}} < r_1$	$r_3 < \frac{p_s}{p_{01}} < r_2$	$\frac{p_s}{p_{01}} < r_3$
$\frac{p_x}{p_{01}}$	$\left\{ \begin{array}{l} < \frac{p_s}{p_{01}} \\ > \frac{p^*}{p_{01}} \end{array} \right.$	$\frac{p^*}{p_{01}}$	$\frac{p^*}{p_{01}}$	$\frac{p^*}{p_{01}}$
$\frac{p_2}{p_{01}}$	$\frac{p_s}{p_{01}}$	$\frac{p_s}{p_{01}}$	r_3	r_3
M_2	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right); < 1$	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right); < 1$	> 1 indipendente da $\frac{p_s}{p_{01}}$	> 1 $\frac{p_s}{p_{01}}$
$\frac{W}{W_{max}}$	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right); < 1$	1	1	1
	moto subsonico isocentrico	onda d'urto normale nel divergente	moto supersonico isocentrico nell'ugello con onde esterne di compressione (fluido sopraespanso)	espansione (fluido sottoespanso)

TABELLA 3.5.1

Modi di funzionamento in un ugello convergente-divergente di fissata geometria ed assegnate condizioni di ristagno a monte

Il luogo dei valori $\frac{p}{p_{01}}$ a valle dell'onda d'urto è rappresentato dalla linea tratteggiata di fig. 3.5.1.

Una ulteriore riduzione di p_s , $r_3 < \frac{p_s}{p_{01}} < r_2$, causa onde di compressione oblique oltre la sezione di uscita (caso f). Il deflusso nel divergente è completamente supersonico e il sistema di onde oblique di compressione esterna non può essere studiato con l'analisi monodimensionale.

Per rapporti di pressione $\frac{p_s}{p_{01}} < r_3$ le condizioni nella sezione di uscita dell'ugello rimangono invariate e come per l'ugello convergente l'adeguamento di pressione avviene mediante onde esterne di espansione (caso h).

Un quadro riassuntivo dei modi di funzionamento di un ugello convergente-divergente è presentato in tab. 3.5.1.

PROBLEMA 3.5.1.

Una portata $W = 0,5$ kg/sec d'aria (supposta a comportamento ideale e $k = 1,4$ (costante)), inizialmente alla pressione di ristagno $p_{01} = 8$ ata ed alla temperatura di ristagno $t_0 = 30$ °C, fluisce da un ugello convergente-divergente supersonico avente le aree della sezione di uscita e di gola nel rapporto $\frac{A_2}{A_g} = 2,4$. Supposta uniforme la divergenza

l'onda d'urto
riata di fig.

$$\frac{p_s}{p_{01}} < r_2$$

re la sezione
divergente è
ma di onde
può essere
e.

le condizio-

imangono in-
te l'adegua-
onde esterne

di funziona-
ente è pre-

(supposta a
nte)), inizial-
8 ata ed al-
fluisce da
sonico aven-
ola nel rap-
divergenza

della sezione del divergente di lunghezza l , deter-
minare:

a) l'area della sezione di gola, della sezione
di uscita e la corrispondente pressione p_2 di pro-
getto;

b) la pressione di scarico p_s quando un'onda
d'urto normale si forma nella sezione di uscita;

c) la sezione nella quale si forma un'onda d'ur-
to normale quando la pressione di scarico vale
 $p_s = 4$ ata.

a) Dalle relazioni (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8) si
ha:

$$T^* = 0,8333 \cdot T_0 = 252,62 \text{ °K}$$

$$p^* = 0,5283 \cdot p_{01} = 4,226 \text{ ata}$$

$$\rho^* = 0,6339 \cdot \rho_{01} = 0,6339 \cdot p_{01}/RT_0 = 5,715 \text{ kg/m}^3$$

da cui:

$$u^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = 318,65 \text{ m/sec}$$

$$A_g = A^* = \frac{W}{\rho^* u^*} = 2,74 \text{ cm}^2 \quad ***$$

$$A_2 = 2,4 \cdot A_g = 6,59 \text{ cm}^2. \quad ***$$

Dalla tabella A2 (in Appendice) delle funzioni
del moto isoentropico in corrispondenza a $\frac{A_2}{A_g} = \frac{A_2}{A^*}$
si ricavano i due rapporti di pressione:

$$\frac{p_2}{p_{01}} = r_1 = 0,957$$

$$\frac{p_2}{p_{01}} = r_3 = 0,068$$

ma poiché l'ugello è stato progettato per condizio-
ni di moto supersonico solo la seconda soluzione:

$$p_2 = 0,068 p_{01} = 0,544 \text{ ata} \quad ***$$

a cui corrisponde:

$$M_2 = 2,39$$

risulta accettabile.

b) Cfr. fig. 3.5.1 P(b). Il moto è isoentropico
fino alla sezione di uscita ove si ha:

$$M_2 = M_x = 2,39.$$

(Si indicano con x ed y i valori delle gran-
dezze rispettivamente a monte ed a valle dell'on-
da d'urto).

Dalla tabella B2 relativa alle funzioni dell'on-
da d'urto normale ($k = 1,4$) si ha:

$$M_y = 0,524$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{p_s}{p_2} = 6,497$$

da cui:

$$p_s = 6,497 \cdot p_2 = 3,534 \text{ ata} \quad ***$$

c) Cfr. fig. 3.5.2 P(c).

In questo caso il rapporto $\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{4}{8} = 0,5$ è
compreso tra r_1 ed r_2 :

$$\frac{0,3534}{8} = 0,441 = r_2 < 0,5 < r_1 = 0,957.$$

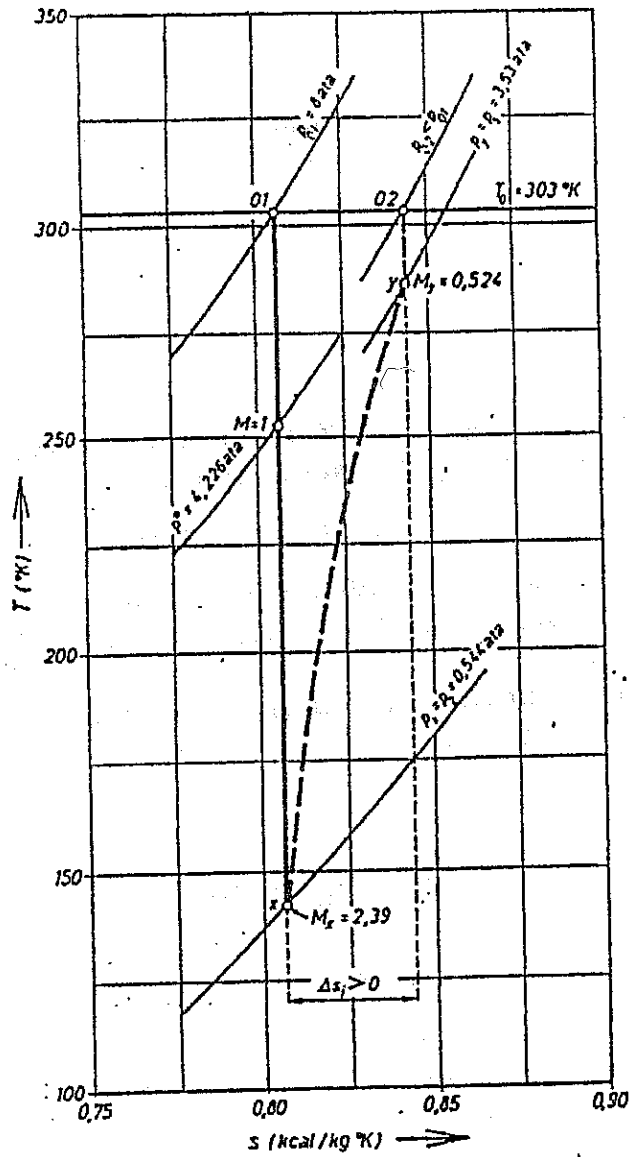


Fig. 3.5.1 P (b). - Problema 3.5.1.

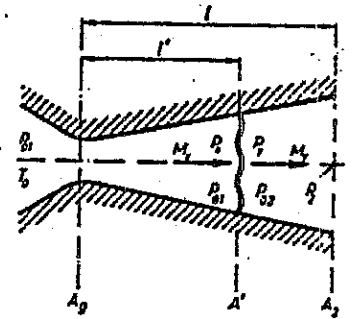
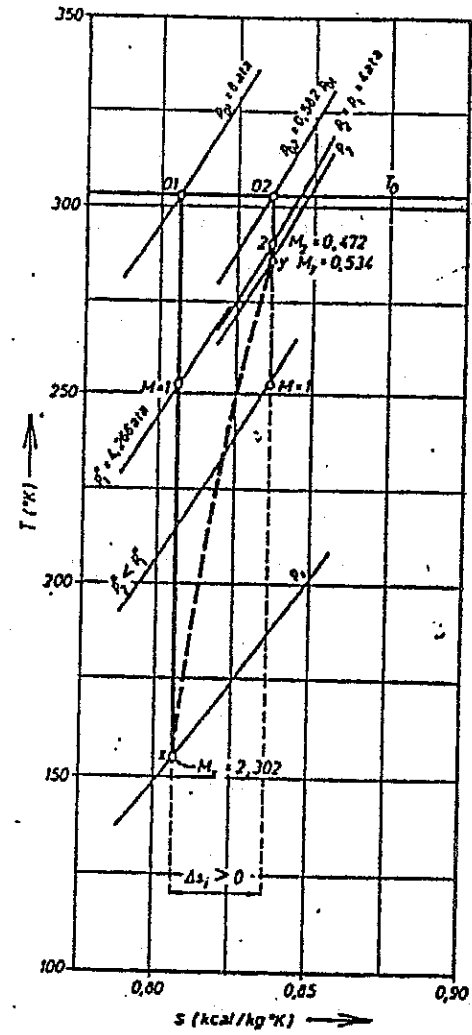


Fig. 3.5.1 P (c). - Problema 3.5.1.

Si ha quindi un'onda d'urto in una sezione del divergente ad una distanza l' dalla sezione di gola che si ottiene dalla relazione:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\frac{d'}{d_g} - 1}{\frac{d_2}{d_g} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{A'}{A_g}} - 1}{\sqrt{\frac{A_2}{A_g}} - 1} \quad (c)$$

Poiché il moto a monte ed a valle dell'onda d'urto è isoentropico e la portata W è "bloccata", al valore massimo corrispondente al valore unitario del numero di Mach nella sezione di gola, si può scrivere:

$$\frac{W}{A_g} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{W}{A_2^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{02}}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

da cui:

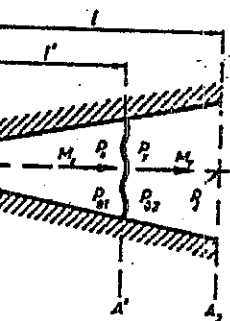
$$A_2^* p_{02} = A_g p_{01}$$

e quindi:

$$\frac{A_2 p_2}{A_2^* p_{02}} = \frac{A_2 p_s}{A_g p_{01}} = 2,4 \cdot 0,5 = 1,2$$

e per la tabella A2:

$$M_2 = 0,472$$



$$\frac{p_2}{p_{02}} = 0,8585.$$

Si può ora calcolare il rapporto tra le pressioni di ristagno a valle ed a monte dell'onda d'urto:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} = \frac{0,5}{0,8585} = 0,5824$$

e tramite la tabella B2 dell'onda d'urto normale:

$$M_x = 2,302$$

$$M_y = 0,534.$$

Il moto è isoentropico fino alla sezione dell'onda d'urto e perciò dalla tabella A2 in corrispondenza a M_x si ottiene:

$$\frac{A'}{A^*} = \frac{A'}{A_g} = 2,2$$

che sostituita nella (c) dà:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\sqrt{2,2-1}}{\sqrt{2,4-1}} = 0,88$$

cioè:

$$l' = 0,88 l.$$

3.6 MOTO ADIABATICO CON ATTRITO IN UN UCELLO. RENDIMENTO.

Il processo di espansione in un ugello, anche se può essere considerato adiabatico per quanto riguarda gli scambi di calore con l'esterno, non può prescindere dal fenomeno dell'attrito il cui effetto è quello di aumentare, rispetto all'equivalente trasformazione isoentropica fino alla stessa pressione finale, la temperatura ed il volume specifico allo sbocco se si tratta di un gas o di un vapore surriscaldato, o di accrescere il titolo finale nel caso di vapore saturo umido con conseguente diminuzione della velocità teorica di efflusso.

Si definisce usualmente il rendimento isoentropico η_u dell'ugello come rapporto tra il valore dell'energia cinetica $u_2^2/2$ effettivamente raggiunta dall'unità di massa del fluido nella sezione di uscita del condotto ed il valore $(u_2^2/2)_s$ che si realizzerebbe se l'espansione adiabatica fosse reversibile, cioè isoentropica, a partire dallo stesso stato iniziale e fino alla stessa pressione finale.

Indicato con 1 lo stato iniziale del fluido (supposto ivi a velocità trascurabile, $u_1 \cong 0$ e $p_1 = p_{01}$) e 2 lo stato finale, dall'espressione (1.3.4), trascurando la variazione di energia potenziale, si ottiene:

$$\eta_u = \frac{u_2^2/2}{(u_2^2/2)_s} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} \quad (3.6.1)$$

dove il pedice s indica che lo stato finale è raggiunto isoentropicamente.

Nel diagramma di fig. 3.6.1 sono riportati qualitativamente gli andamenti dell'espansione adiabatica nel caso reale (linea a tratto) e nel caso ideale di espansione isoentropica (linea continua).

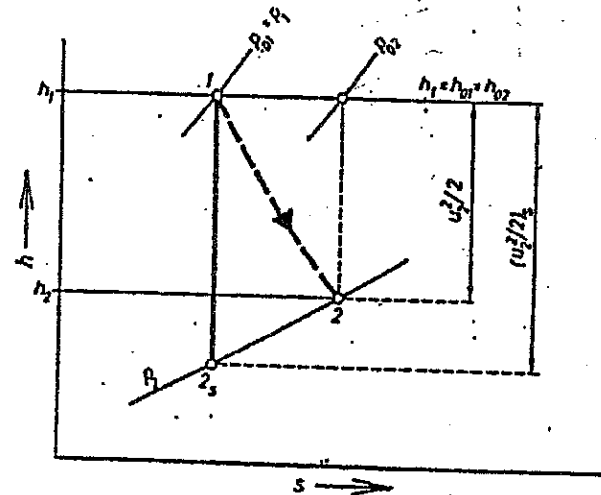


Fig. 3.6.1. - Espansione adiabatica in un ugello; 1-2: trasformazione reale non reversibile; 1-2_s: trasformazione ideale isoentropica.

La velocità reale di efflusso allo sbocco dell'ugello si può ricavare dalla (3.6.1), che per la (1.3.2) si scrive nella forma:

$$u_2 = \sqrt{\eta_u} \sqrt{2 \int_{2s}^1 v \cdot dp} = \varphi \sqrt{2 \int_{2s}^1 v \cdot dp} \quad (3.6.2)$$

dove $\varphi = \sqrt{\eta_u}$, minore dell'unità, è chiamato coefficiente di velocità ed esprime il rapporto tra la velocità reale di efflusso u_2 e quella ideale $(u_2)_s$.

Il valore di u_2 si può allora ottenere risolvendo l'integrale a secondo membro della (3.6.2) mediante l'impiego dell'equazione politropica $p v^n = \text{cost}$:

$$u_2 = \varphi \sqrt{\frac{2n}{n-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]} \quad (3.6.3)$$

ed assegnando all'esponente n il valore:

$n = k$ se si tratta di un gas a comportamento ideale;

oppure i valori empirici:

$n = 1,3$ se il fluido è vapore d'acqua surriscaldato;

$n = 1,035 + 0,1 \cdot x$ se il fluido è vapore d'acqua saturo umido a titolo medio x .

Un metodo alternativo (più immediato quando si può disporre dei diagrammi termodinamici) per la valutazione della velocità di efflusso reale u_2 si ricava immediatamente dalla relazione (1.3.4):

$$u_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}. \quad (3.6.4)$$

Questo metodo verrà illustrato in dettaglio nel Problema 3.6.1.

Il dimensionamento dell'ugello che, per l'assegnata portata di fluido, permette di realizzare la massima velocità possibile consentita dalle condizioni assegnate a monte e dalla pressione imposta a valle p_2 richiede dapprima la conoscenza del valore della pressione critica p^* .

Il valore della pressione critica p^* si può calcolare a mezzo dell'espressione:

$$p^* = p_{01} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n/(n-1)} \quad (3.6.5)$$

con i valori di n precisati più sopra. Nel caso il fluido non sia un gas ideale, l'espressione (3.6.5) con i relativi valori dell'esponente n deve essere riguardata come relazione empirica ⁽¹⁾.

Se risulta $p_2 \geq p^*$ l'ugello sarà formato solo da un condotto convergente in quanto il moto non può che essere ovunque subsonico, raggiungendo al più la velocità sonica per $p_2 = p^*$.

Se $p_2 < p^*$ il condotto dovrà essere costituito da un convergente, che permette di ottenere $M = 1$ nella sezione di gola $A_g = A^*$, seguito da un divergente. La configurazione che ne risulta è quella ben nota dell'ugello di De Laval rappresentato in fig. 3.6.2 nella forma ad asse rettilineo, e che è anche di frequente applicazione con asse curvilineo nei distributori delle turbine a vapore.

Ugelli ad asse rettilineo realizzano usualmente un rendimento isoentropico compreso tra 0,94 e 0,99 mentre quelli ad asse curvilineo realizzano valori compresi tra 0,90 e 0,95.

La lunghezza del tratto tronco-conico divergente deve essere ridotta al fine di minimizzare le perdite dovute alle forze dissipative di attrito.

⁽¹⁾ Anche nel caso che il rendimento isoentropico dell'ugello non possa considerarsi unitario il valore della pressione critica p^* può venire calcolato tramite la relazione (3.6.5); l'irreversibilità dell'espansione è infatti quasi interamente localizzata nell'eventuale tratto divergente dell'ugello, ove il regime di moto è supersonico.

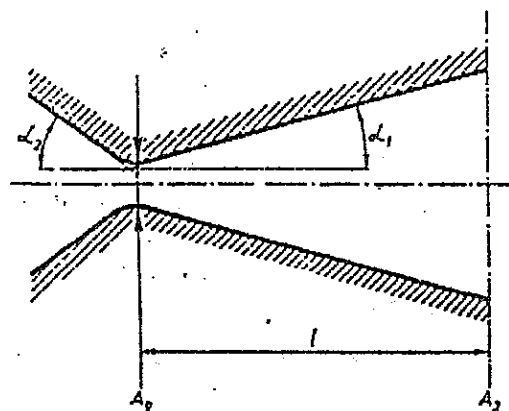


Fig. 3.6.2. - Dimensionamento di un ugello convergente-divergente.

compatibilmente però con la necessità di evitare distacchi di vena: negli ugelli ad asse rettilineo di comune impiego industriale il semiangolo al vertice di apertura α_1 non supera i 10° con valori preferiti compresi tra 5° e 8° . Una conicità variabile con angoli maggiorati in vicinanza della sezione di gola può essere adottata per evitare condotti troppo lunghi.

Il tratto convergente, sempre ben raccordato con l'ambiente a monte, deve essere molto corto per consentire al fluido un rapido incremento della velocità: si impiegano condotti conici con angolo al vertice $2\alpha_2 \cong 45^\circ$ (cfr. fig. 3.6.2).

PROBLEMA 3.6.1

Dimensionare un ugello di De Laval, ad asse rettilineo per una portata di $W = 9500$ kg/h di vapore d'acqua surriscaldato inizialmente alla pres-

sione $p_1 = 30$ ata e temperatura $t_1 = 400^\circ\text{C}$ quando la pressione finale è $p_2 = 1$ ata. Si assuma trascurabile la velocità all'ingresso ed isoentropica l'espansione.

Determinare inoltre la velocità di efflusso se il rendimento isoentropico dell'ugello, anziché unitario, risultasse $\eta_u = 0.9$.

La fig. 3.6.1P illustra il processo nel diagramma $h-s$.

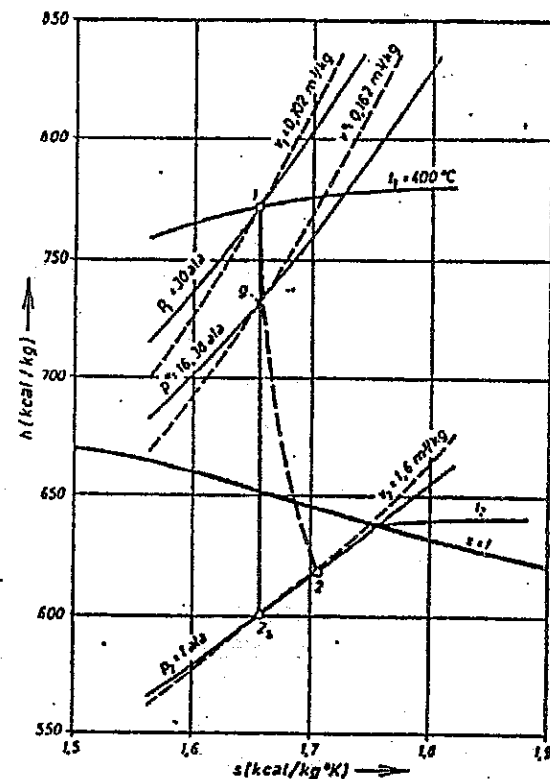


Fig. 3.6.1.P. - Problema 3.6.1.



Si determina dapprima mediante la (3.6.5) il valore della pressione critica p^* assumendo come esponente della trasformazione $n = 1,3$:

$$p^* = p_1 \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 30 \cdot 0,546 = 16,38 \text{ ata.}$$

Poiché $p_2 < p^*$ il condotto deve essere costituito da un convergente-divergente al fine di realizzare la massima velocità possibile consentita dalle condizioni operative fissate.

Con l'ausilio del diagramma $h-s$ si ricava:

$$\begin{aligned} v^* &= 0,162 \text{ m}^3/\text{kg}; \\ h_1 &= 772 \text{ kcal/kg}; \\ h_g &= 730 \text{ kcal/kg}. \end{aligned}$$

La velocità critica del suono nella sezione di gola risulta:

$$u^* = c^* = \sqrt{2(h_1 - h_g)} = \sqrt{2 \cdot 4186(772 - 730)} = 593 \text{ m/sec}$$

e quindi dall'equazione di continuità si può calcolare l'area della sezione medesima:

$$A_g = A^* = \frac{Wv^*}{c^*} = 7,2 \text{ cm}^2.$$

Dal diagramma $h-s$ si ha ancora:

$$v_{2s} = 1,6 \text{ m}^3/\text{kg}; \quad h_{2s} = 600 \text{ kcal/kg}$$

e quindi:

$$u_{2s} = \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1200 \text{ m/sec.}$$

L'area della sezione di uscita A_2 risulta allora:

$$A_2 = \frac{Wv_{2s}}{u_{2s}} = 35,2 \text{ cm}^2.$$

Si possono ora calcolare il diametro della sezione di gola d_g e della sezione terminale del divergente d_2 : risulta $d_2 = 6,7 \text{ cm}$ e $d_g = 3,0 \text{ cm}$; assunto un semiangolo di apertura $\alpha_1 = 7^\circ$ rimane anche determinata la lunghezza l del tratto divergente:

$$l = \frac{d_2 - d_g}{2 \cdot \text{tg } \alpha_1} = \frac{6,7 - 3,0}{2 \cdot 0,1227} = 15 \text{ cm.}$$

Se il rendimento dell'ugello è $\eta_u = 0,9$ la velocità reale di efflusso si ottiene dalla (3.6.1):

$$u_2 = \sqrt{\eta_u} \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1138 \text{ m/sec}$$

e l'entalpia dello stato finale 2 (cfr. diagramma di fig. 3.6.1 P) risulta:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 - \eta_u(h_1 - h_{2s}) = \\ &= 772 - 0,9(772 - 600) = 617,2 \text{ kcal/kg.} \end{aligned}$$

Si osserva che l'espressione empirica $pv^{1,3} = \text{cost}$ è stata impiegata per determinare la pressione critica e quindi indirettamente l'area di gola. Le velocità nelle sezioni di gola e di uscita sono state calcolate con l'ausilio del diagramma $h-s$ (differenze di entalpia in espansioni isoentropiche) e non con l'integrale $\int v dp$ della relazione (3.6.2).

Prima di ultimare l'argomento si dà un breve cenno del fenomeno di *soprassaturazione* che si presenta quando l'espansione attraverso l'ugello porta il vapore dallo stato surriscaldato entro la zona di coesistenza liquido-vapore.

L'espansione isoentropica 1-2 in fig. 3.6.1 P indica ad esempio un cambiamento di fase che dovrebbe avere inizio a partire dalla curva limite di saturazione $x = 1$: la rapidità dell'espansione ritarda però il raggiungimento dell'equilibrio tra la fase liquida e quella vapore; il vapore continua ad espandersi in uno stato metastabile surriscaldato (fase gassosa) fino ad una pressione e temperatura tale a cui avviene un'improvvisa condensazione con comparsa di minuscole gocce di liquido. Il processo irreversibile di condensazione ripristina uno stato di equilibrio stabile con aumento dell'entropia specifica e diminuzione della velocità di efflusso locale.

Nell'intervallo tra il punto sulla curva limite e quello in cui ha luogo l'improvvisa condensazione, il vapore è in uno stato *metastabile* di *soprassaturazione* o di *sottoraffreddamento*, nel senso che la temperatura è ivi minore di quella di saturazione corrispondente alla pressione locale.

Quando il fenomeno della soprassaturazione interessa la gola dell'ugello, si riscontra sperimentalmente una portata maggiore di quella teorica calcolata rispetto all'espansione adiabatica reversibile (moto ovunque in condizioni d'equilibrio termodinamico).

CAPITOLO IV

MOTO CON ATTRITO IN CONDOTTI
A SEZIONE COSTANTE

4.1 GENERALITÀ. FATTORE DI ATTRITO.

Il precedente capitolo è stato quasi interamente indirizzato allo studio del moto isoentropico attraverso condotti a sezione variabile; anche quando si è fatto riferimento a ugelli e diffusori in condizioni reali di funzionamento, come nel paragrafo 3.6, l'analisi è stata condotta sulla base del moto isoentropico e appropriati coefficienti di rendimento tenevano conto delle irreversibilità nel deflusso.

In parecchie situazioni di moto in condotti a sezione costante l'attrito è un fattore importante nel determinare le variazioni delle proprietà nel fluido ed è perciò utile, per valutarne gli effetti, vedere come può essere introdotto quantitativamente nell'analisi del moto monodimensionale.

Si è visto che nell'equazione dell'energia meccanica (1.3.1) compare il termine δR , lavoro delle

forze dissipative riferito all'unità di massa del fluido. Il meccanismo dell'attrito interno che insorge nel moto di un fluido entro un condotto è associato a variazioni radiali di velocità del fluido nella sezione del condotto, quindi ad un fenomeno tipicamente non monodimensionale. È tuttavia spesso possibile (e molto utile per valutazioni quantitative pratiche) esprimere gli effetti dell'attrito interno nel moto di un fluido entro condotti in termini di proprietà "medie" del fluido nella sezione considerata (in particolare velocità media u , densità media ρ ecc.), tali valori medi essendo poi utilizzati trattando il moto come esattamente monodimensionale.

Si consideri un condotto cilindrico, ed in esso il volume elementare di fluido compreso tra le sezioni normali di ascissa x e $(x + dx)$; cfr. fig.4.1.1.

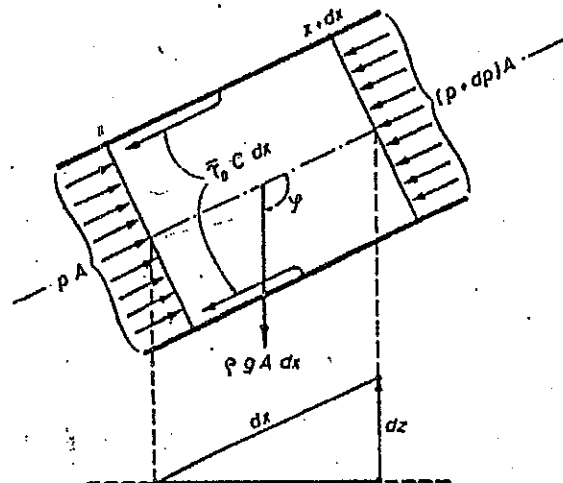


Fig. 4.1.1. - Forze agenti su un elemento di fluido compreso tra due sezioni normali del condotto a distanza infinitesima.

Le forze che agiscono sull'elemento di fluido considerato sono:

- forza d'attrito alla parete cilindrica perimetrale: $\bar{\tau}_0 C \cdot dx$, ove:

$\bar{\tau}_0$: sforzo tangenziale d'attrito (eventualmente medio se il condotto cilindrico non è a sezione circolare) nella parete cilindrica laterale;

C : perimetro della sezione normale del condotto.

- forza peso: $\rho g A \cdot dx$, ove:

A : area della sezione normale del condotto;

g : accelerazione gravitazionale;

ρ : densità del fluido;

- forza di pressione sulle sezioni laterali dell'elemento cilindrico:

$$Ap \quad \text{e} \quad A(p + dp).$$

L'equazione della q.d.m. (1.3.9) applicata (in termini differenziali) all'elemento di fluido considerato porge:

$$-A \cdot dp - \bar{\tau}_0 C \cdot dx + \rho g A \cdot dx \cos \varphi = W \cdot du \quad (4.1.1)$$

ove l'angolo φ è definito nella figura stessa.

Dividendo tutti i termini per ρA , ricordando che $W = \rho u A$ si ottiene:

$$-v \cdot dp - \bar{\tau}_0 \frac{C}{A} \frac{dx}{\rho} - g \cdot dz = \frac{du^2}{2} \quad (4.1.2)$$

Il confronto della (4.1.2) con la (1.3.1) porge immediatamente ($\delta L' = 0$):

$$\delta R = \frac{4\bar{\tau}_0}{\rho} \frac{dx}{d_e} \quad (4.1.3)$$

avendo indicato con d_e il *diametro equivalente* del condotto, definito dalla:

$$d_e = \frac{4A}{C} \quad (4.1.4)$$

Il *fattore d'attrito* f viene definito dalla relazione:

$$f = \frac{\bar{\tau}_0}{\rho u^2/8} \quad (4.1.5)$$

Tenendo conto della relazione (4.1.5), la (4.1.3) si riduce alla:

$$\delta R = f \frac{dx}{d_e} \frac{u^2}{2} \quad (4.1.6)$$

L'analisi dimensionale mostra che, nel caso di moto completamente sviluppato all'interno di condotti cilindrici geometricamente simili, il fattore d'attrito f è funzione del numero di Reynolds del deflusso $Re = (\rho u d_e)/\mu$, del numero di Mach del deflusso $M = u/c$ e della scabrezza relativa del condotto ϵ/d_e . In formule:

$$f = \phi(Re, M, \epsilon/d_e). \quad (4.1.7)$$

Sviluppi teorici indicano, e l'esperienza conferma, che per regimi di moto subsonici ($M < 1$),

il fattore d'attrito f dipende inapprezzabilmente dal numero di Mach. Per moti subsonici completamente sviluppati si ha pertanto:

$$f = \phi(Re, \epsilon/d_e). \quad (4.1.8)$$

Per condotti cilindrici a sezione circolare la dipendenza funzionale (4.1.8) è rappresentata in forma grafica sul *diagramma di Moody* (fig. 4.1.2); si noti che per questa geometria $d_e = d$. Analiticamente il legame funzionale (4.1.8) può essere rappresentato dalle relazioni:

- *moto laminare* ($Re \leq 2000$):

$$f = \frac{64}{Re} \quad (4.1.9)$$

- *moto turbolento* ($Re \geq 10\,000$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (4.1.10)$$

(*relazione di Colebrook*)

- *moto turbolento* ($3\,000 \leq Re \leq 10^5$), *tubi lisci*:

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (4.1.11)$$

(*relazione di Blasius*).

Da notare che in tutti questi casi ϵ è la *scabrezza artificiale equivalente* del condotto.

Nel caso di condotti cilindrici a sezione non

zabilmente dal
i completamen-

(4.1.8)

le circolare la
presentata in
Moody (fig. 4.1.2);
 $\epsilon = d$. Analiti-
ca) può essere

(4.1.9)

(4.1.10)

tubi lisci:

(4.1.11)

asi e è la sca-
ondotto.

a sezione non

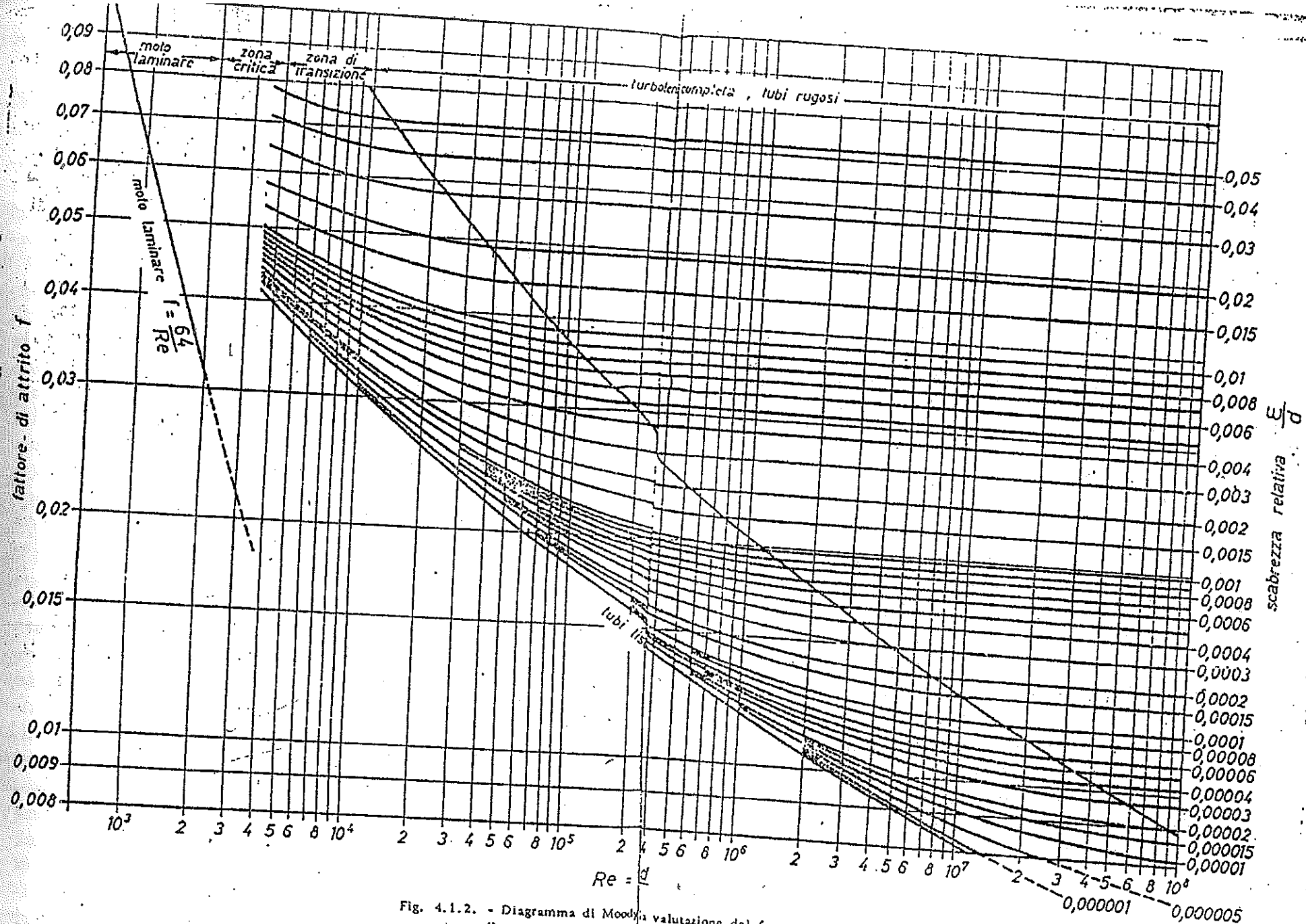


Fig. 4.1.2. - Diagramma di Moody valutazione del fattore di attrito per il moto subsonico completo sviluppato entro tubi.

circolare, varie esperienze con sezioni normali di forma quadrata, rettangolare, triangolare e anulare hanno confermato che, per regime di moto turbolento completamente sviluppato fino a numero di Mach $M = 1$ possono essere usate per la valutazione del fattore di attrito f le stesse correlazioni stabilite nel caso di sezione circolare, naturalmente impiegando il diametro equivalente, d_e , come definito dalla (4.1.4) nella valutazione del numero di Reynolds Re e della scabrezza relativa ϵ/d_e . Per moto laminare invece la dipendenza funzionale (4.1.8) è differente in relazione alle differenti forme della sezione del condotto cilindrico; l'ipotesi di monodimensionalità del moto è d'altra parte una grossolana approssimazione nel caso di regime di flusso laminare.

In prossimità della sezione di imbocco di un condotto il regime di moto non è completamente sviluppato, e le equazioni basate sull'ipotesi di monodimensionalità del deflusso non possono rendere conto degli effetti dovuti al variare del profilo di velocità del fluido nel deflusso stesso. Si dà in questo caso al simbolo f il significato di *fattore di attrito apparente* e lo si definisce come il valore che rende verificata l'equazione monodimensionale del moto (1.3.1), con il termine δR calcolato formalmente secondo la (4.1.6).

In questa situazione il fattore di attrito apparente viene a dipendere da altri parametri, oltre quelli messi in evidenza nella relazione funzionale (4.1.7), come ad esempio il numero di Reynolds locale $Re_x = (\rho u x)/\mu$, con x : distanza della sezio-

ne considerata dalla sezione di imbocco del condotto. Per la medesima ragione il fattore d'attrito apparente medio in condotti corti può avere valori in eccesso rispetto a quanto rilevabile dal diagramma di Moody.

Nel caso di moto supersonico del fluido si applicano le osservazioni relative ai condotti corti, in quanto (come sarà dimostrato nel seguito) la lunghezza massima di condotto in cui si possono mantenere condizioni di moto supersonico è così limitata che non si possono mai raggiungere ivi condizioni di moto completamente sviluppato; oltre a ciò le proprietà del fluido variano molto rapidamente nel moto supersonico, ciò che contribuisce ad ostacolare il raggiungimento di condizioni di regime per il profilo di velocità. In queste condizioni si capisce come i parametri da cui dipende il valore del coefficiente d'attrito apparente f (computato da prove sperimentali a mezzo delle equazioni monodimensionali del moto) sono vari e complessi (numero di Mach M , numero di Reynolds Re , numero di Reynolds locale Re_x , scabrezza relativa del condotto, spessore iniziale dello strato limite, grado di turbolenza iniziale). Prove sperimentali hanno mostrato che per condotti cilindrici lisci a sezione circolare di lunghezza compresa tra 10 e 50 volte il diametro, con numeri di Mach del deflusso compresi tra 1,2 e 3, e numeri di Reynolds compresi tra 25000 e 700000, il coefficiente medio apparente di attrito \bar{f} assume valori compresi tra 0,008 e 0,012, cioè valori circa metà di quelli comunemente incontrati nel moto com-

107

bocco del con-
tattore d'attrito
ud avere valo-
evabile dal dia-

del fluido si ap-
condotti corti,
nel seguito) la
cui si possono
ersonico è così
aggiungere i vi
sviluppati; oltre
no molto rapida-
che contribuisce
condizioni di re-
queste condizio-
a cui dipende il
parente f (com-
mezzo delle equa-
sono vari e com-
di Reynolds Re ,
cabrezza relati-
dello strato li-
. Prove speri-
ondotti cilindrici
mezza compresa
numeri di Mach
, e numeri di
00000, il coeffi-
 f assume valori
valori circa me-
ti nel moto com-

pletamente sviluppato di un fluido incompressibile (diagramma di Moody).

Nel seguito di questo capitolo, trattando moti con attrito verrà supposto che il condotto cilindrico considerato sia a sezione circolare; l'eventuale estensione a sezioni differenti dovrà tener conto di quanto esposto più sopra.

A - MOTO ADIABATICO

4.2 GENERALITÀ.

Per il moto adiabatico in un condotto orizzontale a sezione costante l'equazione del Primo Principio della Termodinamica (1.3.4), in assenza di scambi di lavoro e con variazione di energia potenziale nulla, e l'equazione di continuità (1.3.5) assumono rispettivamente la forma:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{cost} \quad (4.2.1)$$

$$u\rho = \frac{W}{A} = G = \text{cost} \quad (4.2.2)$$

dove il simbolo G rappresenta la *portata specifica* che ha un valore costante in ogni sezione del condotto.

Dal confronto delle due relazioni si ottiene:

$$h = h_0 - \frac{G^2}{2} v^2 \quad (4.2.3)$$

La (4.2.3) è nota come *equazione di Fanno* e resta determinata dai valori dell'entalpia specifica totale h_0 e della portata specifica G ; tutti i possibili stati di moto sono perciò rappresentati nel piano $(h-v)$ dalla curva (parabola) di fig. 4.2.1.

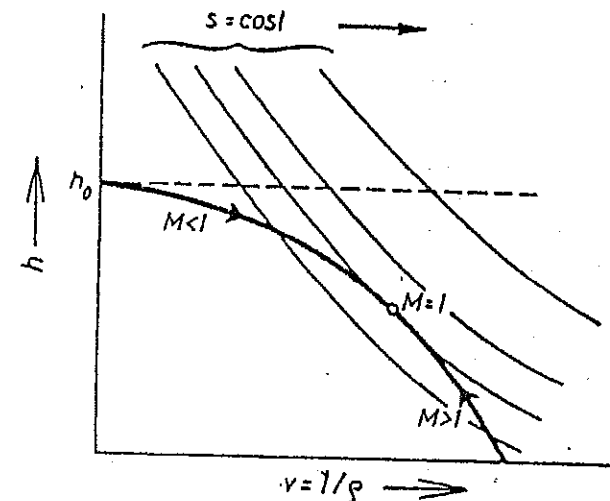


Fig. 4.2.1. - Curva di Fanno nel diagramma $h-v$.

Se il fluido è una sostanza pura di cui è nota l'equazione di stato, $s = s(h, v)$, il valore dell'entropia è determinato dai valori dell'entalpia specifica e del volume specifico e le linee di Fanno per il medesimo valore di h_0 ma a diversa portata specifica G assumono nel diagramma $(h-s)$ la forma illustrata in fig. 4.2.2.

Le linee a entalpia costante sono pure linee a velocità costante e perciò gli stati appartenenti al ramo superiore della curva corrispondono a ve-

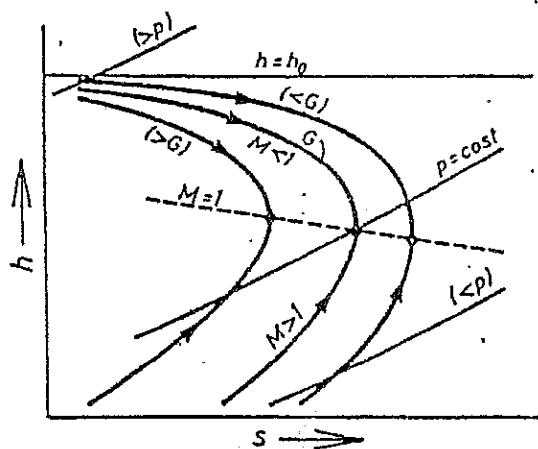


Fig. 4.2.2. - Curve di Fanno nel diagramma $h-s$, relative allo stesso valore dell'entalpia di ristagno h_0 ma a differenti valori della portata specifica G .

locità minori rispetto a quelli 2 del ramo inferiore (fig. 4.2.3). Inoltre punti successivi rappresentanti stati differenti del moto non possono appartenere ad entrambi i rami della curva poiché, in accordo al Secondo Principio della Termodinamica, l'entropia in un processo adiabatico può solamente aumentare.

Il verso di evoluzione del moto deve quindi essere quello indicato dalle frecce; i punti rappresentativi di stati successivi approssimano uno stato limite di massima entropia la cui caratteristica si ottiene dal confronto delle (4.2.1) e (4.2.2) scritte in forma differenziale:

$$dh + u^2 \frac{du}{u} = 0 \quad (4.2.4)$$

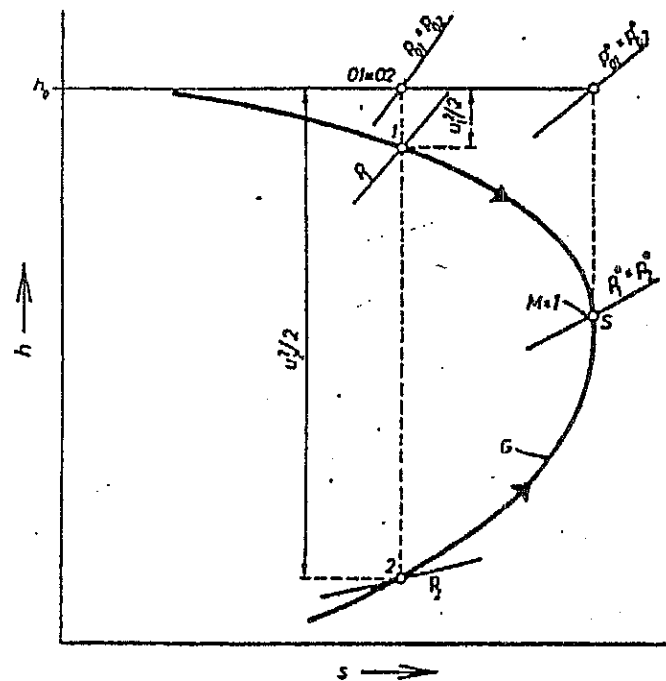


Fig. 4.2.3. - Curva di Fanno nel diagramma $h-s$.

$$\frac{du}{u} + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (4.2.5)$$

con la relazione termodinamica:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (4.2.6)$$

Si ha:

$$u^2 = - \frac{dh}{\frac{du}{u}} = \frac{dh}{\frac{d\rho}{\rho}} = \rho T \frac{ds}{d\rho} + \frac{dp}{d\rho} \quad (4.2.7)$$

La derivata $\frac{dp}{d\rho}$ rappresenta la velocità del suono se la trasformazione lungo cui viene valutata è quella isoentropica. Poiché $ds = 0$ nel punto S di massima entropia la (4.2.7) porge:

$$M^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 \quad (4.2.8)$$

ed il numero di Mach corrispondente a questo stato limite risulta unitario. Ne consegue che il ramo superiore della curva di Fanno rappresenta stati di moto subsonico e quello inferiore stati di moto supersonico.

Se il moto è inizialmente subsonico (punto 1 di fig. 4.2.3) un aumento di entropia dovuto agli effetti dell'attrito porta ad un aumento di velocità e del numero di Mach ed a una diminuzione dell'entalpia e della pressione.

Se il moto è inizialmente supersonico (punto 2 di fig. 4.2.3) all'andamento crescente dell'entropia corrispondono velocità e numeri di Mach decrescenti associati a entalpie e pressioni crescenti.

In entrambi i casi gli stati del fluido tendono a $M = 1$ e perciò un moto subsonico, adiabatico con attrito in un condotto a sezione costante, non può mai diventare supersonico ed un moto supersonico, in assenza di discontinuità, non può mai diventare subsonico.



ma h-s.

(4.2.5)

(4.2.6)

(4.2.7)

4.3 RELAZIONI DI FANNO PER GAS IDEALI.

L'equazione differenziale dell'energia (4.2.4) e l'espressione differenziata del numero di Mach si possono scrivere, per un gas ideale, nella forma:

$$\frac{dT}{T} + (k-1) M^2 \frac{du}{u} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (4.3.2)$$

Dal loro confronto si ottiene:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(k-1) M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.4)$$

relazioni che danno le variazioni relative di velocità e di temperatura in funzione del numero di Mach. La loro validità non è limitata al moto di Fanno ma è estesa a qualsiasi moto adiabatico di un gas a comportamento ideale.

L'equazione di stato di un gas ideale in forma differenziale si scrive:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.3.5)$$

e tenendo conto della (4.2.5) e delle (4.3.3) e (4.3.4) si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + (k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.6)$$

L'espressione (1.5.6) relativa alla pressione di ristagno, in forma differenziale diventa:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.7)$$

e per la (4.3.6):

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.8)$$

Infine l'equazione dell'energia meccanica (1.3.1) nelle ipotesi poste ($\delta L' = g dz = 0$), e per la (4.1.6) si scrive:

$$kM^2 \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{kM^2}{2} = 0 \quad (4.3.9)$$

e per le (4.3.3) e (4.3.6):

$$\boxed{\frac{dM}{M} = \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{d}} \quad (4.3.10)$$

Poiché il termine $f \frac{dx}{d}$ è sempre positivo nel senso del moto la (4.3.10) indica che ($k > 1$) la variazione del numero di Mach deve essere positiva.

$dM > 0$, nel moto subsonico ($M < 1$) e negativa, $dM < 0$, nel moto supersonico ($M > 1$).

Gli effetti dell'attrito sulle proprietà del fluido sono così evidenziati dalle variazioni delle grandezze M , u , ρ , T , p e p_0 nel senso del deflusso e sono riassunti per i moti subsonico e supersonico nella tabella:

MOTO	M	u	ρ	T	ρ_0	p_0
subsonico $M < 1$	cresce	cresce	cala	cala	cala	cala
supersonico $M > 1$	cala	cala	cresce	cresce	cresce	cala

4.4 PARAMETRO LIMITE DI ATTRITO. LUNGHEZZA MASSIMA.

Si è visto che in un tubo a sezione costante in presenza di attrito il moto può evolvere adiabaticamente solo verso il regime sonico, $M = 1$, senza che tale limite possa essere oltrepassato. Quindi per fissate condizioni iniziali, numero di Mach eguale a M in una data sezione, esiste una lunghezza massima (valutata dalla sezione considerata) compatibile con le condizioni fissate e che non introduce discontinuità nel deflusso (onde d'urto). La massima lunghezza possibile, indicata con l_{\max} , è la lunghezza valutata dalla sezione considerata del condotto alla sezione *reale* o *fittizia* a cui corrisponde numero di Mach unitario, raggiunto in condizioni di moto di Fanno.

L'espressione di l_{\max} si ottiene dalla (4.3.10) scritta nella forma:

$$f \frac{dx}{d} = \frac{2(1-M^2)}{kM^3(1 + \frac{k-1}{2}M^2)} dM$$

$$= \frac{2}{k} \left(\frac{1}{M^3} - \frac{k+1}{2M} + \frac{k+1}{2} \frac{M}{M^2 + \frac{2}{k-1}} \right) dM \quad (4.4.1)$$

e integrata tra i limiti 0 e l_{max} per la variabile x ed M e 1 per la variabile M . L'integrazione della (4.4.1) porge:

$$\bar{f} \frac{l_{max}}{d} = \frac{1}{k} \left(\frac{1-M^2}{M^2} + \frac{k+1}{2} \ln \frac{1 + \frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}M^2} \right) \quad (4.4.2)$$

dove \bar{f} è il fattore medio di attrito definito da:

$$\bar{f} = \frac{1}{l_{max}} \int_0^{l_{max}} f \cdot dx \quad (4.4.3)$$

(per semplicità di scrittura il simbolo f viene in seguito usualmente impiegato anche per indicare il valore medio del fattore di attrito).

Il gruppo adimensionale $f \frac{l_{max}}{d}$, chiamato *parametro limite di attrito* relativo alla sezione considerata, è tabulato in funzione di M per alcuni valori di k in Appendice (tabelle C1, C2, C3) e rappresentato graficamente in fig. 4.4.1 per $k = 1,4$.

ANTE

115

(1) e negativa, $dM < 0$.

proprietà del fluido: variazioni delle grandezze del deflusso e moto subsonico e supersonico

	P	
T	P ₀	P ₀
cala	cala	cala
e cresce	cresce	cala

LUNGHEZZA MASSIMA.

sezione costante in cui il fluido evolve adiabaticamente, $M = 1$, senza essere sottoposto a shock. Quindi, per un dato numero di Mach, esiste una lunghezza massima che non può essere superata (onde d'urto). Questa lunghezza, indicata con l_{max} , è la lunghezza massima che può essere considerata per la sezione considerata o *fittizia* a cui corrisponde il numero di Mach unitario, raggiunto in corrispondenza della (4.3.10)

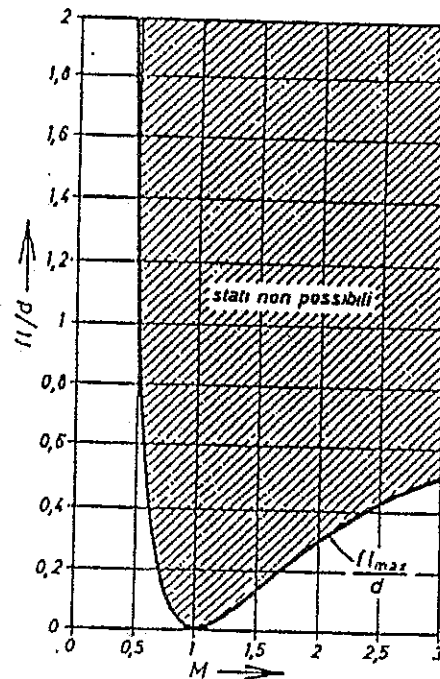


Fig. 4.4.1. Parametro limite d'attrito $f l_{max} / d$ in funzione del numero di Mach M per moto di Fanno di un gas ideale con $k = 1,4$. La zona tratteggiata rappresenta situazioni di moto non possibili (almeno in assenza di onde d'urto normali).

In questo diagramma il simbolo l (nel gruppo adimensionale in ordinata) rappresenta la lunghezza del condotto tra la sezione considerata (ove il numero di Mach vale M) e la sezione di uscita. I punti esterni all'area tratteggiata rappresentano stati possibili di moto: quelli sulla curva corrispondono a numeri di Mach unitari all'estremità del condotto, mentre quelli al disotto della curva $f \frac{l_{max}}{d}$ corrispondono a numeri di Mach maggiori

o minori dell'unità all'uscita del condotto a seconda che il moto sia inizialmente supersonico o subsonico.

Si può anche dedurre che per un prefissato valore del gruppo $f \frac{l}{d}$ il numero di Mach iniziale non può, nel caso di moto subsonico, superare un valore limite massimo e, nel caso di moto supersonico in assenza di onde d'urto, essere inferiore ad un certo valore minimo.

La forma della curva di $f \frac{l_{\max}}{d}$ in funzione di M mostra che gli effetti dell'attrito sono molto sensibili ad elevati numeri di Mach. Infatti dalla (4.4.2) si ottiene:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} - 1 \right) \quad (4.4.4)$$

e questa per $k = 1,4$ è un fattore medio di attrito pari a $f = 0,01$ dà:

$$\left(\frac{l_{\max}}{d} \right)_{M=\infty} \cong 82. \quad (4.4.5)$$

Si vede così che per quanto elevato sia il numero di Mach nella sezione iniziale, al limite infinito, il moto è deaccelerato a $M = 1$ in un condotto la cui lunghezza è pari a circa 82 volte il suo diametro.

La lunghezza l_{12} del condotto necessaria affinché il moto passi dal valore M_1 nella sezione 1 al valore M_2 in una successiva sezione 2 si determina, come illustrato in fig. 4.4.2, dalla differenza:

$$l_{12} = (l_{\max})_{M_1} - (l_{\max})_{M_2}. \quad (4.4.6)$$

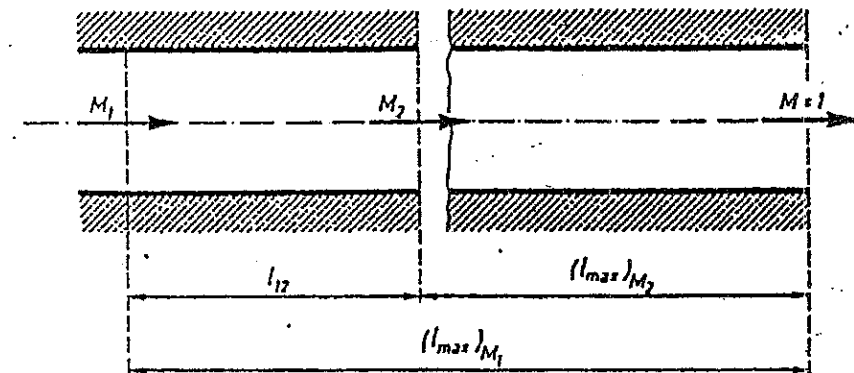


Fig. 4.4.2. - Determinazione della lunghezza di condotto nel quale il numero di Mach passa dal valore M_1 al valore M_2 .

4.5 STATI DI RIFERIMENTO. TABELLA DI FANNO.

I risultati ottenuti dalle relazioni dei precedenti paragrafi possono essere dedotti da tabelle espresse in funzione di rapporti adimensionali.

A tal fine è necessario ricorrere a stati di riferimento; lo stato di riferimento più conveniente ed utile è lo stato sulla linea di Fanno di massima entropia. Questo stato corrispondente a $M = 1$ viene ancora indicato con un apice asteriscato, tuttavia esso differisce da quello critico isoentropico. Nel moto di Fanno infatti l'entropia non è costante e lo stato critico, a partire dalle condizioni locali, è raggiunto irreversibilmente.

L'equazione dell'energia (4.2.1) per un gas ideale diventa:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (4.5.1)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (4.5.2)$$

Dall'equazione di continuità, tenendo conto dell'espressione del numero di Mach e della (4.5.1), si ha:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 \sqrt{kRT_2}}{M_1 \sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.3)$$

da cui:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/2} \quad (4.5.4)$$

e:

$$\frac{u}{u^*} = M \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.5)$$

Dall'equazione di stato $pv = RT$ e per le (4.5.2) e (4.5.4) si ricava:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.6)$$

e poiché il rapporto delle pressioni di ristagno si può esprimere nella forma:

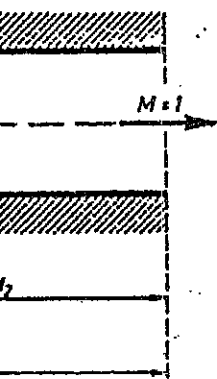
$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p} \cdot \frac{p}{p^*} \cdot \frac{p^*}{p_0^*} = \left(\frac{p_0}{p} \right) \frac{p}{p^*} \quad (4.5.7)$$

per la (4.5.6) e (4.5.6) si ha:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (4.5.8)$$

La fig. 4.5.1 illustra per $k = 1,4$ le variazioni dei rapporti $\frac{T}{T^*}$, $\frac{p}{p^*}$, $\frac{u}{u^*}$, $\frac{p_0}{p_0^*}$ e di $f \frac{l_{\max}}{d}$ in

(4.4.6)



condotto nel quale
valore M_2 .

ni dei prece-
otti da tabelle
dimensionali.

re a stati di
più conveniente
anno di massi-
sistente a $M = 1$
steriscato, tut-
co isoentropi-
opia non è co-
dalle condizio-
nte.

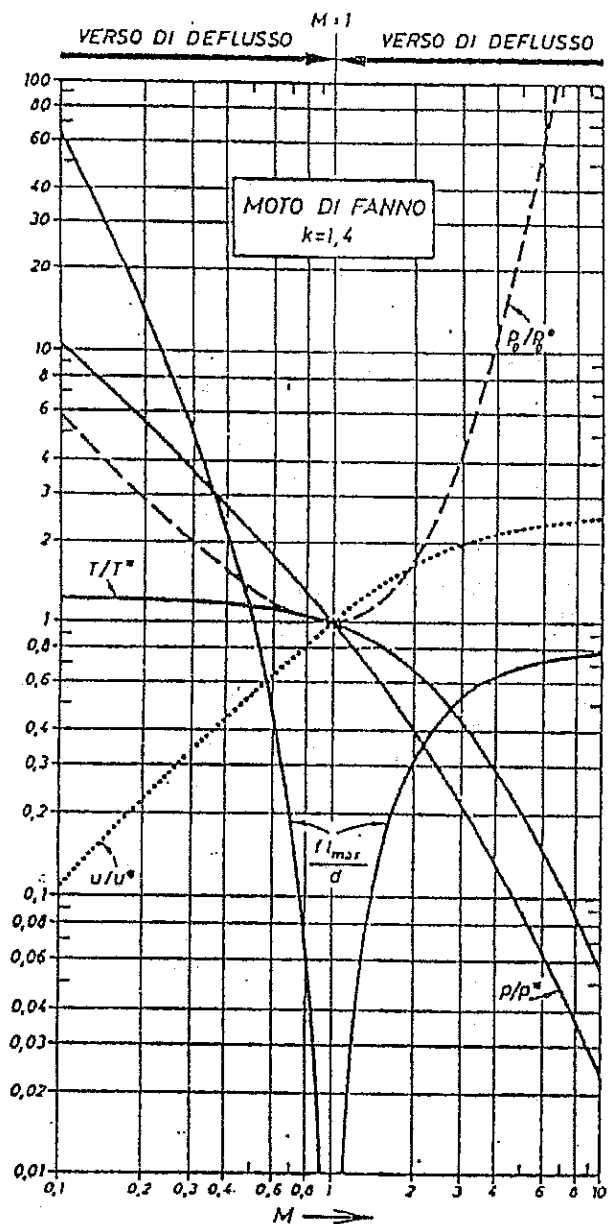


Fig. 4.5.1. - Funzioni del moto di Fanno per un gas ideale con $k = 1,4$.

funzione del numero di Mach. Un più ampio campo di variabilità delle medesime grandezze si ha dai valori riportati nelle tabelle di Appendice C1, C2, C3, relative a differenti valori di k .

Poiché i valori dello stato critico sono costanti per un determinato moto adiabatico in un condotto a sezione costante è possibile determinare il rapporto tra le grandezze locali di due stati 1 e 2 del fluido solo dalla conoscenza dei rispettivi numeri di Mach M_1 ed M_2 . Ad esempio per le pressioni si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2}}{\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1}} \quad (4.5.9)$$

PROBLEMA 4.5.1

L'ugello convergente-divergente del problema 3.5.1 progettato per $M = 2,39$ allo sbocco, viene collegato a un tubo a sezione costante, eguale a quella terminale del divergente. Determinare:

a) la lunghezza del condotto necessaria a ridurre il numero di Mach a $M = 1,3$ (si ipotizzi isentropico il moto nell'ugello e adiabatico nel condotto);

b) la pressione di uscita dal condotto a sezione costante nell'ipotesi che esso sia lungo 30 cm

123

e che un'onda d'urto normale si formi a 20 cm dalla sua sezione d'imbocco.

In entrambi i casi si assuma per il fattore medio d'attrito il valore $f = 0,01$.

a) Il numero di Mach all'ingresso del condotto a sezione costante è $M_1 = 2,39$ ed in corrispondenza, della tabella C2 si ha:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} = 0,40760.$$

A $M_2 = 1,3$ ancora dalla tabella C2:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 0,06483$$

(4.5.9)

per cui la differenza:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 0,34277$$

permette di ricavare la lunghezza necessaria per ridurre il numero di Mach dal valore $M_1 = 2,39$ al valore $M_2 = 1,3$.

Si ottiene, essendo $d = 2,86$ cm:

$$l = \frac{0,34277 \cdot 2,86 \cdot 10^{-2}}{0,01} = 0,980 \text{ m.} \quad ***$$

b) Cfr. la figura 4.5.1 P. Per la (4.4.6) si ha:

$$\begin{aligned} \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_x} &= \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{1,x}}{d}\right) \\ &= 0,4076 - 0,06993 = 0,33767 \end{aligned}$$

del problema sbocco. viene tante, eguale a terminare:

necessaria a ri-3 (si ipotizzi i-ubatico nel con-

ndotto a sezio- a lungo 30 cm

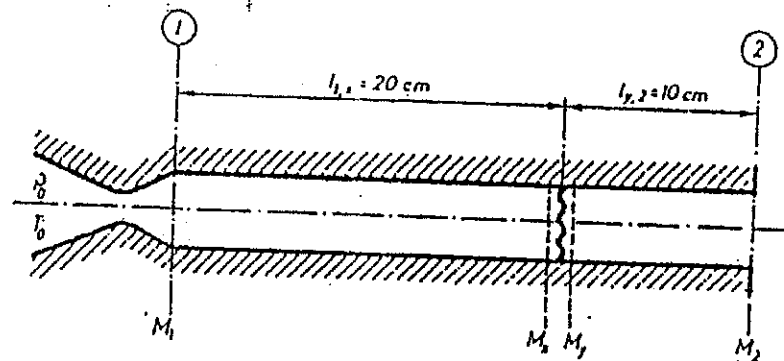


Fig. 4.5.1. P. - Problema 4.5.1.

e dalla tabella C2:

$$M_x = 2,11373$$

in quanto non si tiene conto del valore subsonico di M_x che non corrisponde ai dati di progetto.

In corrispondenza a $M_x = 2,11373$ la funzione dell'onda d'urto normale (tabella B2) dà:

$$M_y = 0,55922$$

e per le funzioni del moto di Fanno (tab. C2):

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_y} = 0,67767.$$

Ancora per la (4.4.6):

$$\begin{aligned} \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} &= \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_y} - \left(f \frac{l_{y,2}}{d}\right) \\ &= 0,6427 \end{aligned}$$

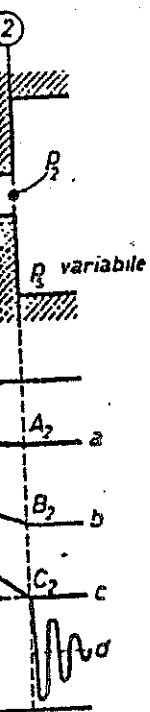
da cui:

$$M_2 = 0,566.$$

convergente.

ano l, d ed A
della sezione
condotto.

ico p_s prossi-
ssata nella se-
la velocità
è subsonica
lungo il con-
di fig. 4.6.1.
termina il valo-



Hi Fanno in un con-
vergente.

re del numero di Mach M_1 all'imbocco della parte cilindrica del condotto e quindi per la (3.3.3) quello della portata W :

$$W = A \sqrt{\frac{k}{RT_0}} p_{01} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (4.6.1)$$

Al decrescere di p_s rispetto a p_{01} la portata W , come illustrato in fig. 4.6.2, aumenta fino a raggiungere un valore massimo alla pressione $p_s = p_2 = p^*$ a cui corrisponde $M_2 = 1$ nella sezione di uscita del condotto (condizione c). In ogni sezione

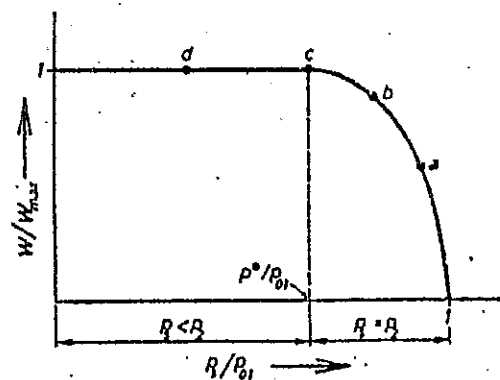


Fig. 4.6.2. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per il condotto di fig. 4.6.1.

a monte la pressione è più elevata ed il moto è ovunque subsonico; all'imbocco del tratto cilindrico del condotto il numero di Mach ha raggiunto un valore massimo $M_{1,max}$, dipendente dalle condizioni iniziali, per cui risulta:

$$\left(f \frac{l_{max}}{d}\right)_{M_{1,max}} = f \frac{l}{d} \quad (4.6.2)$$

Una ulteriore riduzione della pressione di scarico p_s (condizione d) non comporta variazioni nella portata: essa rimane bloccata al valore relativo alle condizioni corrispondenti a $M_2 = 1$. Il deflusso nel condotto non viene modificato ($c \equiv d$) e solo oltre la sezione di uscita ha luogo l'adeguamento di pressione mediante onde oblique di espansione.

Le situazioni di moto relative alle differenti condizioni di pressione di scarico p_s , esaminate in fig. 4.6.1 sono illustrate anche nel diagramma (T-s) di fig. 4.6.3.

È importante rilevare che gli effetti dell'attrito, nel moto in un condotto a sezione costante

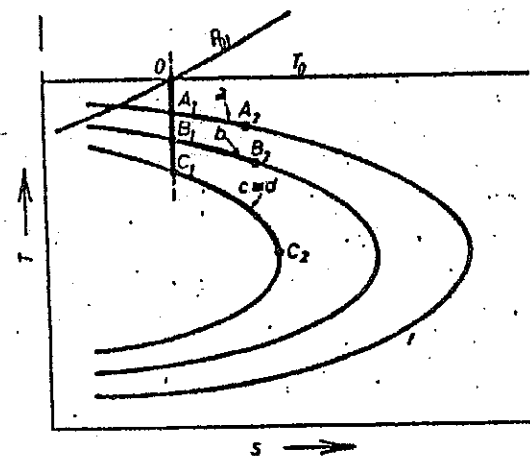


Fig. 4.6.3. - Rappresentazione nel diagramma T-s del moto di Fanno nelle diverse condizioni operative per il condotto di fig. 4.6.1.

alimentato da un convergente con fissate condizioni di ristagno, limitano la portata ad un valore che, poiché $M_{1\max} < 1$, è sempre minore a quello massimo possibile in condizioni di deflusso isoentropico $(W_{\max})_s$, cioè con $f \frac{l}{d} = 0$ e $M_{1\max} = 1$.

Le variazioni di portata W rispetto a $(W_{\max})_s$ sono diagrammate per differenti valori del rapporto $f \frac{l}{d}$, relativamente a un gas ideale con $k = 1,4$, in funzione di $\frac{p_s}{p_{01}}$ nel diagramma di fig. 4.6.4.

Se il parametro d'attrito $f \frac{l}{d}$ ha valore nullo

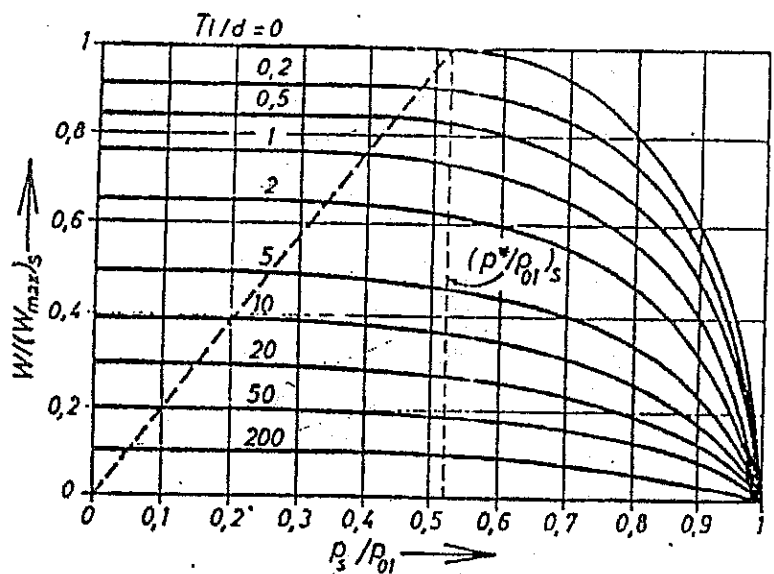


Fig. 4.6.4. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s relativamente al moto di Fanno di un gas ideale ($k = 1,4$) in condotti a differenti valori del parametro d'attrito $f l/d$ alimentati da un ugello convergente.

l'andamento di $\frac{W}{(W_{\max})_s}$ rispetto a $\frac{p_s}{p_{01}}$ è quello già illustrato in fig. 3.4.3 per il deflusso isoentropico in un ugello convergente. Se invece il valore del parametro d'attrito è diverso da zero, come nel moto di Fanno, un aumento di $f \frac{l}{d}$ (ad esempio a seguito di un incremento del valore del fattore medio di attrito f o del rapporto $\frac{l}{d}$) limita la portata massima possibile W_{\max} a valori via via decrescenti raggiunti in corrispondenza a rapporti di pressione $\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}}$ sempre più piccoli.

La costruzione del diagramma di fig. 4.6.4 può essere fatta determinando dapprima i punti corrispondenti a Mach unitario all'uscita del condotto, $M_2 = 1$. A tal fine fissato un valore per il parametro limite di attrito $f \frac{l_{\max}}{d}$ dalla espressione (4.4.2) o dalla tabella C2 rimane determinato il numero di Mach $M_{1\max}$ nella sezione di imbocco del tubo ed il rapporto $\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s}$ che per la (4.6.1) si scrive:

$$\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s} = M_{1\max} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_{1\max}^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (4.6.3)$$

In corrispondenza al valore di $M_{1\max}$ dalla relazione (1.5.6) e dalle funzioni del moto di Fanno

sono valutati i rapporti $\frac{p_1}{p_{01}}$, $\left(\frac{p_1}{p^*}\right)_F$ ⁽¹⁾ e quindi:

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_1}{p_{01}} \left(\frac{p^*}{p_1}\right)_F = M_{1\max} \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{1\max}^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (4.6.4)$$

La (4.6.4) rappresenta l'ascissa estrema del segmento orizzontale di ordinata $\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s}$ ed i punti corrispondenti a tale ascissa appartengono alla retta tratteggiata di fig. 4.6.4 come risulta dall'eguaglianza dei rapporti ⁽²⁾:

$$\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1}{\left(\frac{p^*}{p_{01}}\right)_s} \quad (4.6.5)$$

La parte di ogni curva alla destra del segmento orizzontale, relativa al medesimo valore del pa-

⁽¹⁾ Il pedice *F* è qui usato per sottolineare che il rapporto (p_1/p^*) è relativo a condizioni di deflusso di Fanno.

⁽²⁾ Il pedice *s* è qui usato per sottolineare che il rapporto (p^*/p_{01}) è relativo a condizioni di moto isoentropiche, e corrisponde al valore assunto dalla (4.6.4) per $M_{1\max} = 1$.

rametro $f \frac{l}{d}$, si può costruire per punti in relazione a differenti valori del numero di Mach all'ingresso del tratto cilindrico del condotto minori di quello massimo $M_{1\max}$ calcolato precedentemente tramite la (4.6.2). Scelto $M_1 < M_{1\max}$ dalla relazione:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} \quad (4.6.6)$$

si ottiene, per le relazioni del moto di Fanno, M_2 e $\left(\frac{p_2}{p^*}\right)_F$ che permettono, con l'ausilio della relazione (1.5.6), di determinare il rapporto:

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)_F \left(\frac{p^*}{p_1}\right)_F \frac{p_1}{p_{01}} \quad (4.6.7)$$

Per ogni valore del numero di Mach minore di $M_{1\max}$ rimane determinato per la (4.6.3) $\frac{W}{(W_{\max})_s}$ e per la (4.6.7) $\frac{p_s}{p_{01}}$; si può così completare la parte di curva, alla destra del segmento orizzontale, corrispondente ad ogni fissato valore del parametro $f \frac{l}{d}$.

Il diagramma è di interesse applicativo in quanto permette una valutazione diretta della portata in funzione delle pressioni di scarico qualora siano fissate le condizioni di ristagno a monte e la geometria del condotto. Si sottolinea che in ta-

$\frac{p_s}{p_{01}}$ è quello già

esso isoentropico
ce il valore del
zero, come nel

(ad esempio a
re del fattore me.

limita la porta.

ri via via decre
a rapporti di

piccoli.

a di fig. 4.6.4 può
na i punti corri
lita del condotto,
ore per il para-

alla espressione

determinato il
one di imbocco

che per la (4.6.1)

$$\frac{k+1}{2(k-1)} \quad (4.6.3)$$

$M_{1\max}$ dalla re
moto di Fanno

li condizioni la portata non può superare, per quanto bassa sia mantenuta la pressione di scarico, il valore limite corrispondente alla pressione di scarico $p_s = p^*$, valore per cui il numero di Mach all'estremità del condotto risulta unitario.

II° caso: *Condotto alimentato da un convergente-divergente.*

Il corrispondente caso di moto adiabatico con attrito in un condotto, di assegnata geometria, alimentato da un convergente-divergente viene analizzato nelle differenti condizioni operative in fig. 4.6.5. Le condizioni di ristagno siano fissate e costanti mentre possano essere variate le condizioni di pressione a valle del condotto. Viene conservata la simbologia del caso precedente.

Il numero di Mach M_1 (> 1) ⁽¹⁾ e la pressione p_1 nella sezione di raccordo tra l'ugello e il condotto, sono determinati dal rapporto isoentropico

co $\frac{A_1}{A_g} = \frac{A}{A^*}$; per le relazioni del moto di Fanno restano quindi pure fissati il valore del parametro

limite d'attrito $\left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1}$ ed il valore della pressione p^* .

(1) Si suppone moto inizialmente supersonico ($M_1 > 1$). Se risulta $M_1 < 1$, o il moto è ovunque subsonico nell'ugello, ed allora si possono trarre conclusioni uguali a quelle relative al condotto cilindrico alimentato da un ugello convergente; oppure vi è formazione di un'onda d'urto normale nel divergente dell'ugello, e le conclusioni possono essere tratte considerando anche quanto detto al § 3.5.

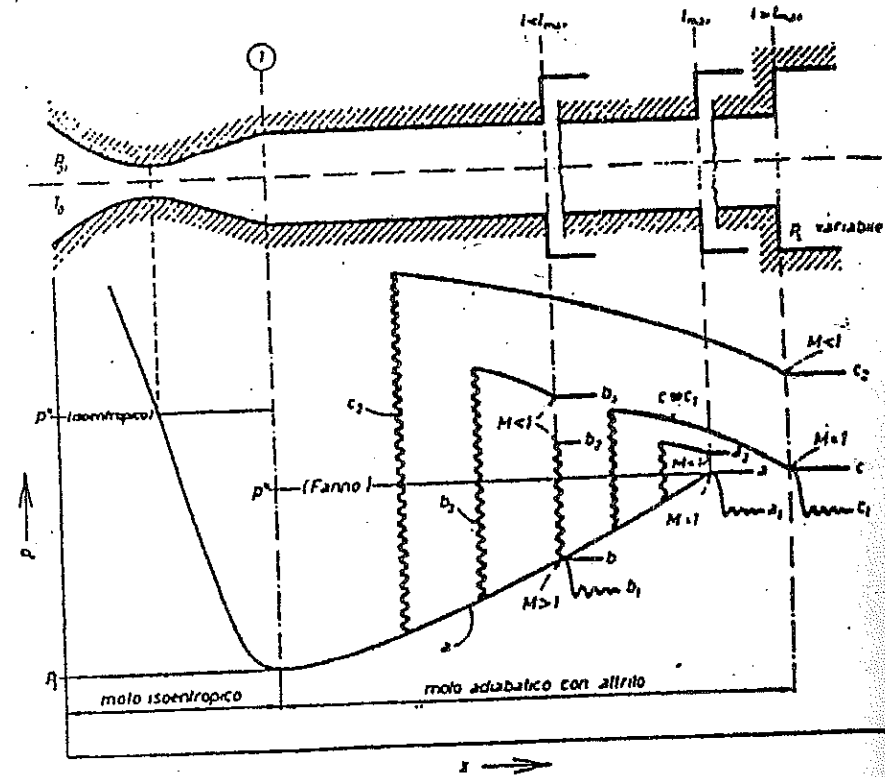
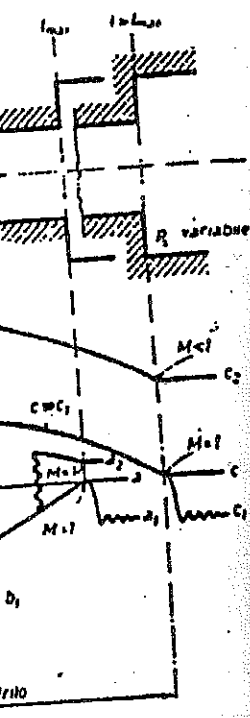


Fig. 4.6.5. - Profili di pressione nel moto di Fanno in condotti di differenti lunghezze alimentati da un ugello convergente-divergente, per diversi valori della pressione allo scarico p_s .

Si vuole analizzare l'influenza della pressione di scarico p_s nel deflusso ed a tal fine si differenziano tre casi a seconda che la lunghezza reale del condotto è eguale, minore o maggiore di quella massima compatibile con le condizioni iniziali fissate nella sezione 1; si preferisce confrontare direttamente le lunghezze del condotto piuttosto



Fanno in condotti di dif-
fidente-divergente, per di-
carico p_s .

la della pressione
il fine si differen-
lunghezza reale
maggiore di quel-
condizioni iniziali
erisce confrontare
condotto piuttosto

che i relativi parametri d'attrito $f l / d$, supponendo noti e costanti i valori del diametro d e del fattore d'attrito medio f : con ciò si potrà dare maggior concretezza ai ragionamenti che seguono, che d'altra parte possono prestarsi ad una estensione immediata.

a) $l = (l_{max})_{M_1}$

$p_s \leq p^*$. - Il moto è interamente supersonico nel condotto; nel senso del moto la pressione aumenta e il numero di Mach diminuisce fino a raggiungere le condizioni soniche nella sezione terminale di sbocco:

curva $a - a$ per $p_s = p^*$
curva $a - a_1$ per $p_s < p^*$

in quest'ultima ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo oltre la sezione di sbocco mediante onde di espansione

$p_s > p^*$. - La velocità allo sbocco del tubo non può che essere subsonica. Un'onda d'urto normale ⁽¹⁾ si forma in una sezione del condotto in di-

⁽¹⁾ E' facile rendersi conto che un'onda d'urto normale fa passare il fluido da uno stato sul ramo supersonico della curva di Fanno ad uno stato (determinato) sul ramo subsonico della medesima linea di Fanno. L'onda d'urto non modifica pertanto il valore p^* .

pendenza del valore di p_s : curva $a - a_2$; all'aumentare di p_s l'onda d'urto si sposta verso monte rispetto al senso di deflusso.

Le trasformazioni corrispondenti a questi due casi possono essere rappresentate nel diagramma entropico ($T - s$) di fig. 4.6.6 dalle curve 0-1-b-S e 0-1-x-y-z rispettivamente.

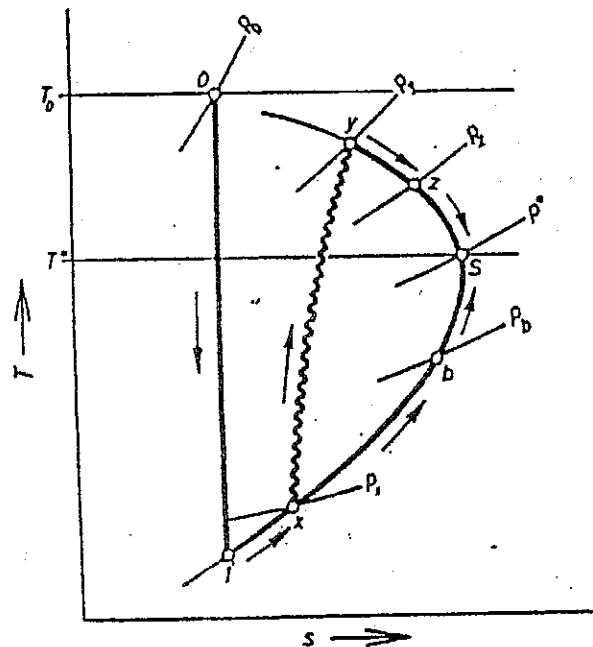


Fig. 4.6.6. - Trasformazioni nel diagramma $T-s$ relative al moto di Fanno entro condotti alimentati da un ugello convergente-divergente.

b)

$$l < (l_{\max})_{M_1}$$

Il parametro d'attrito fl/d , con i valori della pressione p_1 all'imbocco del condotto cilindrico e del relativo numero di Mach $M_1 (> 1)$, definiscono, tramite le funzioni del moto di Fanno, il valore $p_b (< p^*)$ della pressione nella sezione di sbocco, per cui il moto è supersonico senza onde d'urto:

$$p_b = p_1 \left(\frac{p}{p^*} \right)_{M_b} / \left(\frac{p}{p^*} \right)_{M_1}$$

con $M_b (> 1)$ tale da soddisfare alla:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_b}$$

Si possono distinguere i casi:

$p_s \leq p_b$. - Il deflusso è continuo e supersonico lungo tutto il condotto e la velocità di uscita è supersonica:

$$\begin{array}{ll} \text{curva } a-b & \text{per } p_s = p_b < p^* \\ \text{curva } a-b_1 & \text{per } p_s < p_b < p^* \end{array}$$

in quest'ultima ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo oltre la sezione di uscita mediante onde di espansione.

Per una particolare pressione di scarico $p_s = p_{b2}$ un'onda d'urto normale si forma nella sezione di uscita: curva $a-b_2$; il valore di questa

pressione in funzione della pressione p_b e del numero di Mach M_b nella sezione di sbocco a monte dell'onda d'urto si ottiene dalla (2.3.10):

$$p_{b2} = p_b \left(\frac{2k}{k+1} M_b^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \quad (4.6.1)$$

Si ha quindi:

$p_b < p_s < p_{b2}$. - Il moto è ancora supersonico nel condotto e l'adeguamento di pressione avviene esternamente mediante onde d'urto oblique.

$p_s > p_{b2}$. - Si ha la formazione di un'onda d'urto in una sezione del condotto: curva $a-b_3$. Il moto passa da supersonico a subsonico attraverso l'onda d'urto e la pressione di scarico p_s ne determina la sua posizione. Al crescere del valore di p_s l'onda d'urto si sposta verso monte rispetto al senso del deflusso.

Nel diagramma di fig. 4.6.6 i primi due casi sono rappresentabili dalla trasformazione 0-1-b, e l'ultimo ancora da una trasformazione del tipo 0-1-x-y-z.

c)

$$l > (l_{\max})_{M_1}$$

In questo caso un deflusso completamente privo di discontinuità è impossibile. Un'onda d'urto si forma sempre in una sezione del condotto.

139

ANTE

sione p_b e del nu-
di sbocco a mon.
lla (2.3.10):

$$\frac{-1}{+1} \quad (4.6.8)$$

ancora supersonico
pressione avviene
urto oblique.

one di un'onda d'ur-
curva $a-b_3$. Il mo-
sonico attraverso
scarico p_s , ne de-
scendere del valore
rso monte rispetto

o i primi due cas
ormazione 0-1-b, e
azione del tipo 0

completamente pri
e. Un'onda d'urto
e del condotto.

$p_s > p^*$. - La velocità allo sbocco è subsonica e la sezione del condotto nella quale si forma l'onda d'urto dipende dal valore della pressione di scarico p_s : curva c_2 .

$p_s \leq p^*$. - Il numero di Mach nella sezione di uscita è unitario:

curva $a-c$ per $p_s = p^*$
curva $a-c_1$ per $p_s < p^*$

in questa seconda ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo a mezzo di onde oblique di espansione.

A differenza del caso precedente la posizione dell'onda d'urto normale è ben definita nel condotto e risulta indipendente dal valore della pressione di scarico p_s ($\leq p^*$).

I due casi sono rappresentabili rispettivamente nel diagramma T-s di fig. 4.6.6 con le trasformazioni 0-1-x-y-z e 0-1-x-y-S.

In fig. 4.6.7 è illustrato l'andamento della pressione e del numero di Mach per successivi incrementi di lunghezza (a partire dal valore $(l_{max})_{M_1}$) di un condotto con fissate condizioni all'imbocco. L'onda d'urto si sposta a monte fino a formarsi nella sezione di ingresso del tubo (lunghezza l^*). In queste condizioni il moto nel tratto cilindrico del condotto è completamente subsonico ed è sempre accelerato verso il valore di Mach unitario che viene raggiunto nella sezione terminale.

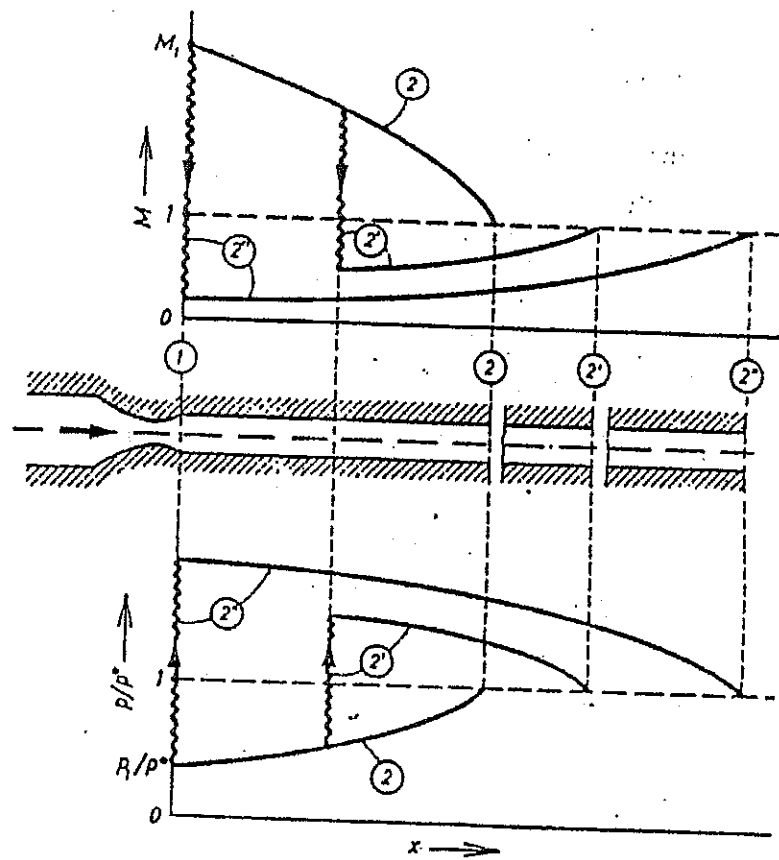


Fig. 4.6.7. - Andamento della pressione p e del numero di Mach M nel moto di Fanno in condotti di lunghezza $l \geq (l_{max})_{M_1}$ allungati con un ugello convergente-divergente. La pressione di scarico p_s è assunta $p_s < (p^*)_{M_1}$.

Per ulteriori aumenti di lunghezza l'onda d'urto si sposta nel divergente dell'ugello fino a formarsi nella sezione di gola ed in tal caso un successivo incremento cambia completamente le caratteristiche del deflusso riducendo il valore della portata (choking).

Analogo risultato di spostamento dell'onda di urto fino a condizioni di choking si ottiene nei casi trattati più sopra di moto subsonico allo sbocco aumentando oltre un certo limite il valore della pressione di scarico.

PROBLEMA 4.6.1

Da un serbatoio un gas a comportamento ideale (con $k = 1,3$ e $M_m = 16$ kg/kgmole) alla pressione $p_0 = 8$ ata e alla temperatura $T_0 = 320$ °K fluisce attraverso un ugello convergente in un tubo a sezione circolare di lunghezza $l = 80$ cm e diametro $d = 50$ mm. Assunto per il fattore di attrito il valore medio $f = 0,01$ e supposto il moto isoentropico nel convergente e adiabatico nel condotto, determinare la portata quando la pressione di scarico a valle risulta eguale rispettivamente a:

- $p_s = 2$ ata
- $p_s = 7$ ata

Poiché non si ha a disposizione un diagramma analogo a quello di fig. 4.6.4 per gas ideale con $k = 1,3$, la determinazione della portata può essere fatta solo dopo aver confrontato tra di loro il valore dei rapporti $\frac{p^*}{p_0}$ e $\frac{p_s}{p_0}$.

Se $\frac{p^*}{p_0} \geq \frac{p_s}{p_0}$ la lunghezza del condotto è tale che $f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1}$ e quindi massima risulta la

portata per le condizioni (di ristagno e geometriche) fissate.

Se invece $\frac{p^*}{p_0} < \frac{p_s}{p_0}$ la portata non risulta massima per le condizioni imposte e la sua determinazione ha luogo con procedimento iterativo come viene in seguito illustrato per una delle due condizioni di pressione di scarico imposte.

a) Indicate con 1 e 2 le sezioni di ingresso e di uscita del condotto cilindrico e supposto:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1} = \frac{0,01 \cdot 0,80}{0,05} = 0,16$$

dalle funzioni del moto di Fanno (tabella C1) si ottiene:

$$M_1 = 0,7379$$

$$\left(\frac{p_1}{p^*} \right)_F = 1,3974$$

e poiché il moto è isoentropico nell'ugello in corrispondenza al valore di M_1 la tabella A1 porge:

$$\frac{p_1}{p_0} = 0,7116; \quad \frac{T_1}{T_0} = 0,9245$$

e quindi:

$$p_1 = 0,7116 \cdot p_0 = 5,6928 \text{ ata}$$

$$T_1 = 0,9245 \cdot T_0 = 295,84 \text{ °K}$$

$$\rho_1 = 3,635 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} = 329,93 \text{ m/sec}$$

$$W = u_1 \rho_1 A = 2,354 \text{ kg/sec.}$$

Il rapporto tra la pressione critica e quella di ristagno si esprime:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)_F \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1,3974} 0,7116 = 0,5092$$

e poiché:

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{2}{8} < \frac{p^*}{p_0} = 0,5092$$

la portata precedentemente calcolata risulta quella richiesta:

$$W = W_{\max} = 2,354 \text{ kg/sec.} \quad ***$$

b) In questo caso si ha:

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{7}{8} = 0,875 > \frac{p^*}{p_0} = 0,5092$$

la portata quindi non può risultare quella massima. La sua determinazione verrà fatta con un metodo iterativo fissando un valore di M_1 , evidentemente inferiore a quello del caso precedente.

Ad esempio fissato $M_1 = 0,6$ dalla tabella C1 si ha:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{0,6} = 0,54086; \quad \left(\frac{p_1}{p^*}\right)_F = 1,74091$$

e quindi:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 0,54086 - 0,16 = 0,38086$$

da cui:

$$M_2 = 0,6429; \quad \left(\frac{p_2}{p^*}\right)_F = 1,6187.$$

Essendo $\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_s}{p_0} = 0,875$ si può ora calcolare il rapporto:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p^*}\right)_F \left(\frac{p^*}{p_2}\right)_F \frac{p_2}{p_0} = 0,94103$$

a cui corrisponde, nella tabella A1, $M_1 = 0,30686$.

Questo valore è notevolmente discorde da quello assunto inizialmente $M_1 = 0,6$ e quindi il procedimento di calcolo deve essere ripetuto assumendo $M_1 = 0,30686$ come nuovo valore iniziale. Si ottiene così la successione:

M_1 (fissato)	M_1 (calcolato)
0,30686	0,4368
0,4368	0,4077
0,4077	0,41622
0,41622	0,41386
0,41386	0,41456
0,41456	0,41435
0,41435	0,41439

che permette di determinare con buona approssimazione il valore richiesto $M_1 = 0,41437$.

La portata può essere ora calcolata secondo il procedimento già descritto nel caso a); in corrispondenza al valore di M_1 la tabella A1 porge:

$$\frac{p_1}{p_0} = 0,89566$$

$$\frac{T_1}{T_0} = 0,97489$$

e quindi:

$$p_1 = 0,89566 \cdot p_0 = 7,165 \text{ ata}$$

$$T_1 = 0,97489 \cdot T_0 = 311,96 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\rho_1 = 4,33 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} = 190,25 \text{ m/sec}$$

$$W = u_1 \rho_1 A = 1,61 \text{ kg/sec.}$$

B - MOTO ISOTERMO PER UN GAS IDEALE

4.7 GENERALITÀ.

Viene qui trattato il moto di un gas a comportamento ideale che defluisce in condizioni isoterme in un condotto a sezione costante con variazioni trascurabili di energia potenziale; viene considerata l'azione dell'attrito concomitante ad uno scambio termico con l'esterno di entità tale da mantenere il gas a temperatura costante durante tutto il deflusso.

Tipica applicazione di questo regime di deflusso (in condizioni naturalmente subsoniche) si ha nei lunghi gasdotti interrati o no, ove si hanno

(per effetto dell'attrito) notevoli variazioni di pressione che impediscono di trattare, anche in prima approssimazione, il moto come quello di un fluido incomprimibile; d'altra parte, per effetto degli scambi termici si può considerare il gas ovunque in equilibrio termico con l'ambiente esterno, quindi in condizioni isoterme (almeno con buona approssimazione).

Per trattare questo tipo di deflusso si impiegano le equazioni dell'energia meccanica (1.3.1), della continuità (1.3.6) e l'equazione di stato del gas ideale (1.3.8) che nelle ipotesi poste assumono la forma:

- equazione dell'energia meccanica:

$$\frac{du^2}{2} + v \cdot dp + f \frac{dx}{d} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (4.7.1)$$

- equazione di continuità:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (4.7.2)$$

- equazione di stato:

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (4.7.3)$$

Ricordando poi che è $M = u/\sqrt{kRT}$, si ricava (T = cost):

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} \quad (4.7.4)$$

variazioni di pressione, anche in primo ordine, quello di un fluido per effetto degli attriti che il gas ovunque è sottoposto a un agente esterno, e che almeno con buona

deflusso si impiega la meccanica (1.3.1), di cui lo stato del gas in diverse sezioni assume la

meccanica:

= 0 (4.7.1)

Dividendo la (4.7.1) per $\rho v = RT$ si ricava:

$$\frac{u du}{RT} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{u^2}{2RT} = 0$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$kM^2 \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{k}{2} M^2 = 0 \quad (4.7.5)$$

Le espressioni (4.7.2), (4.7.3) e (4.7.4) porgono:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u} = -\frac{dM}{M} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.7.6)$$

Dalla (4.7.5) e dalla (4.7.6) si ricava:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u} = -\frac{dM}{M} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-kM^2)} f \frac{dx}{d} \quad (4.7.7)$$

Dalla relazione di carattere generale (1.5.4):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

differenziando in forma logaritmica e ricordando che $dT = 0$, si ricava:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k-1}{M^2 + \frac{k-1}{2}} \frac{dM}{M} \quad (4.7.8)$$

\sqrt{kRT} , si ricava

(4.7.9)

che, ricordando l'espressione di $\frac{dM}{M}$ ricavabile dalla (4.7.7), porge:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k(k-1)M^2}{\left(\frac{2}{M^2} + k - 1\right)(1-kM^2)} f \frac{dx}{d} \quad (4.7.9)$$

In maniera analoga a quanto fatto per il moto adiabatico le relazioni (4.7.7) e (4.7.9) permettono di stabilire il verso di variazione lungo il deflusso isoterma delle diverse grandezze dinamiche e termodinamiche; nel caso specifico delle grandezze qui esaminate, ricordando che $f \frac{dx}{d}$ è sempre positivo nel senso del moto, si può notare come queste variano in senso opposto a seconda che $M > 1/\sqrt{k}$ o $M < 1/\sqrt{k}$; il valore $1/\sqrt{k}$ (numero < 1) è il limite a cui tende il numero di Mach M nel moto isoterma, sia partendo da condizioni supersoniche che subsoniche. La tabella che segue riassume questi risultati:

	$M < 1/\sqrt{k}$ (subsonico)	$M > 1/\sqrt{k}$ (subsonico o supersonico)
Pressione	decrece	crece
Densità	decrece	crece
Velocità	crece	decrece
Numero di Mach	crece	decrece
Temperatura d'arresto	crece	decrece

Ricordando che il calore scambiato è esprimibile con la relazione:

$$dQ = c_p dT + \frac{du^2}{2} = c_p dT_0 \quad (4.7.10)$$

si può concludere che per $M < 1/\sqrt{k}$ bisogna fornire calore al gas fluente per mantenerlo in condizioni isoterme, mentre nel moto supersonico o comunque per $M > 1/\sqrt{k}$ bisogna sottrarre calore al gas fluente per mantenerne costante la temperatura.

In analogia a quanto fatto per il moto di Fanno, è anche qui utile calcolare l'espressione della lunghezza massima di condotto l_{\max} per cui il moto è possibile (senza discontinuità) per un assegnato valore del numero di Mach M nella sezione considerata. Dalla (4.7.7) si ottiene:

$$\int_0^{l_{\max}} \frac{dx}{d} = \int_{M^2}^{1/k} \frac{1 - kM^2}{kM^4} dM^2 \quad (4.7.11)$$

ove l'integrale è esteso tra i limiti $x = 0$, ove $M = M$, e lo stato limite del moto isoterme ove $x = l_{\max}$ e $M = 1/\sqrt{k}$ (stato di riferimento del moto isoterme). Integrando si ricava:

$$\int_0^{l_{\max}} \frac{dx}{d} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \quad (4.7.12)$$

Denotando il valore delle varie grandezze allo stato di riferimento (ove $M = 1/\sqrt{k}$ e $l = l_{\max}$) coi simboli p^{*t} , u^{*t} ecc., ricordando che $u = M\sqrt{kRT}$ ($T = \text{cost}$) si ricava:

$$\frac{u}{u^{*t}} = \sqrt{k} \cdot M \quad (4.7.13)$$

Si ricava analogamente:

$$\frac{\rho}{\rho^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot M} \quad (4.7.14)$$

$$\frac{p}{p^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot M} \quad (4.7.15)$$

$$\frac{p_0}{p_0^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{2k}{3k-1} \right)^{k/(k-1)} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)}}{M} \quad (4.7.16)$$

$$\frac{T_0}{T_0^{*t}} = \frac{2k}{3k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (4.7.17)$$

La relazione (4.7.12) è tabulata in Appendice (per alcuni valori di k (tab. D)). Per $k = 1.4$ le relazioni fondamentali del moto isoterme da (4.7.12) a (4.7.17) sono riportate in forma grafica nel

rie grandezze allo
 \sqrt{k} e $l = l_{max}$ con
 che $u = M\sqrt{kR}$

(4.7.13)

(4.7.14)

(4.7.15)

$$\frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} \right)^k \frac{1}{(k-1)}$$

(4.7.16)

(4.7.17)

data in Appendice
 Per $k = 1,4$ le
 isoterme da (4.7.
 forma grafica nel

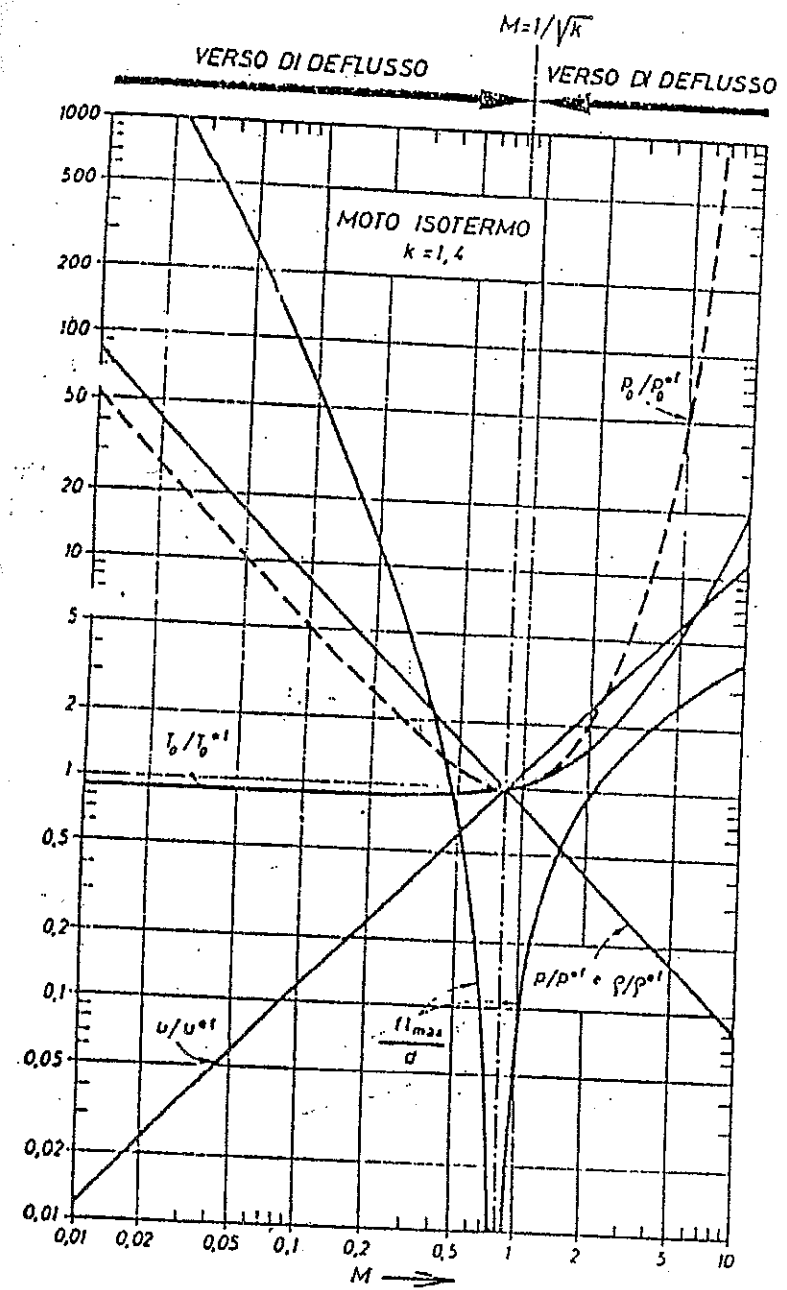


Fig. 4.7.1. - Funzioni del moto isoterme per un gas ideale con $k = 1,4$.

diagramma di fig. 4.7.1. L'impiego di queste relazioni è analogo a quanto già descritto per il moto adiabatico, e verrà esemplificato nell'applicazione numerica riportata qui sotto.

PROBLEMA 4.7.1

Un gasdotto della lunghezza $l = 200$ km ha diametro interno $d = 80$ cm; nella sezione di uscita deve scaricare una portata $W_{v2} = 2 \cdot 10^6$ m³/giorno di gas naturale (che si può trattare come un gas ideale, con $k = 1,3$ (costante) e $M_m = 16$) alla pressione $p_2 = 2$ ata e temperatura $t_2 = 20$ °C. Ipotezzando un deflusso isoterme calcolare la pressione a cui il gas deve alimentare il gasdotto nella sezione di ingresso, ed il flusso termico globalmente scambiato nel gasdotto. (Viscosità dinamica del gas naturale in oggetto $\mu = 0,01$ centipoi- ses; scabrezza relativa del tubo $\epsilon/d = 0,00005$).

Si calcola innanzitutto la portata di massa W di gas nel gasdotto:

$$W = \frac{W_{v2}}{v_2} = \frac{2 \cdot 10^6}{\frac{8317}{16} \frac{237,15 + 20}{2 \cdot 9,81 \cdot 10^4}} = 2574 \cdot 10^3 \text{ kg/giorno} = 107,25 \cdot 10^3 \text{ kg/h.}$$

Numero di Reynolds:

$$Re = \frac{4W}{\pi d \mu} = \frac{4 \cdot 107,25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 0,01 \cdot 3,6} = 4,744 \cdot 10^6.$$

Dal diagramma di Moody (fig. 4.1.2) si ricava il valore del fattore d'attrito $f = 0,0112$.

Numero di Mach nella sezione di sbocco del gasdotto:

$$M_2 = \frac{u_2}{c} = \frac{4 W_{v_2} / (\pi d^2)}{\sqrt{kRT}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^6 (24 \cdot 3600) (3,14 \cdot 0,8^2)}{\sqrt{1,3 \cdot \frac{8317}{16} (273,15 + 20)}} = \frac{46,08}{445,08} = 0,1035$$

Dalla (4.7.12) o per interpolazione dalla tabella in Appendice D si ricava:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 66,53$$

Ricordando che risulta:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = f \frac{l}{d}$$

si ricava:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} = 66,53 + 0,0112 \cdot \frac{200 \cdot 10^3}{0,8} = 66,53 + 2800 = 2866,53.$$

Si ricava quindi, risolvendo per tentativi l'equazione (4.7.12) o per interpolazione dalla tabella in Appendice:

$$M_1 = 0,01636.$$

Dalla relazione (4.7.16) si ricava:

$$\left(\frac{p}{p^{*1}}\right)_{M_1} = 53,61; \quad \left(\frac{p}{p^{*1}}\right)_{M_2} = 8,474$$

da cui:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p}{p^{*1}}\right)_{M_1} / \left(\frac{p}{p^{*1}}\right)_{M_2} = \frac{53,61}{8,474} = 6,33$$

$$p_1 = 2 \cdot 6,33 = 12,66 \text{ ata}$$

Dalla relazione (1.5.4) si può ricavare:

$$T_{01} = 293,162 \text{ °K}; \quad T_{02} = 293,621 \text{ °K}$$

da cui:

$$q = c_p (T_{02} - T_{01}) W = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} (T_{02} - T_{01}) \cdot W$$

$$= \frac{1,3}{0,3} \frac{8317}{4186 \cdot 16} (0,459) \cdot 107,25 \cdot 10^3 \frac{\text{kcal}}{\text{h}}$$

$$= 26490 \text{ kcal/h}$$

155

$$\frac{200 \cdot 10^3}{0,8}$$

2866,53 .

ntativi l'equazio-
nalla tabella in

cava:

$$= 8,474$$

M₂

$$\frac{53,61}{8,474} = 6,33$$

o ricavare:

$$= 293,621 \text{ °K}$$

CAPITOLO V

MOTO DI RAYLEIGH

5.1 GENERALITÀ.

Col nome *moto di Rayleigh* si designa il moto internamente reversibile a regime permanente di un fluido comprimibile in un condotto a sezione costante, con scambio termico (e non di lavoro) con l'esterno; l'attributo della reversibilità interna impone l'assenza di fenomeni dissipativi interni, in particolare quindi dell'attrito; si suppone inoltre trascurabile la variazione di energia potenziale del fluido.

Le importanti conclusioni cui conduce la trattazione del moto di Rayleigh trovano applicazione pratica soprattutto nella analisi del processo di ossidazione del combustibile nelle camere di combustione a sezione costante (ad esempio dei motori a getto) quando si può considerare (almeno in prima approssimazione) che l'aggiunta di combustibile al flusso primario di gas comburente (solitamente aria in eccesso rispetto alla quantità ste-

chiometrica) ed il processo di combustione non modificano apprezzabilmente la composizione del flusso gassoso; è noto che in tal caso il processo adiabatico di combustione si può considerare equivalente ad un processo con scambio termico esterno del cosiddetto calore di reazione. In queste condizioni, dato anche la limitata lunghezza del condotto interessato alla combustione, è senz'altro lecito trascurare l'effetto dell'attrito rispetto all'effetto della combustione stessa sulla variazione delle proprietà del flusso gassoso.

Una equazione nelle variabili termodinamiche della linea di Rayleigh si ricava considerando le equazioni dell'energia meccanica (1.3.1) e di continuità (1.3.6) che nelle ipotesi poste assumono la forma:

- equazione dell'energia meccanica:

$$v dp + u du = 0 \quad (5.1.1)$$

- equazione di continuità:

$$\frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = 0. \quad (5.1.2)$$

Dalle equazioni (5.1.1) e (5.1.2) si ricava immediatamente:

$$dp + \left(\frac{u}{v}\right)^2 dv = 0 \quad (5.1.3)$$

che, integrata tenendo conto della (1.3.5) fornisce:

$$p + \left(\frac{W}{A}\right)^2 v' = \text{cost} \quad (5.1.4)$$

La linea di Rayleigh resta quindi definita dalla conoscenza di un suo stato termodinamico (espresso dal valore di una coppia di variabili termodinamiche indipendenti, in particolare p e v') e dal valore della relativa portata specifica di massa $G = W/A$.

Una equazione della linea di Rayleigh nella variabile termodinamica p e nella variabile meccanica u si trova immediatamente dalla (5.1.4) e dalla (1.3.5). Si ricava:

$$p + \frac{W}{A} u = \text{cost} \quad (5.1.5)$$

La linea di Rayleigh è quindi rappresentata da un segmento di retta nel diagramma termodinamico $p-v'$; lo stesso segmento di retta rappresenta la linea di Rayleigh anche nel diagramma $p-u$, ove la scala della velocità sia tale che risulti $u = v \frac{W}{A}$; si veda la figura 5.1.1. Il valore della pendenza

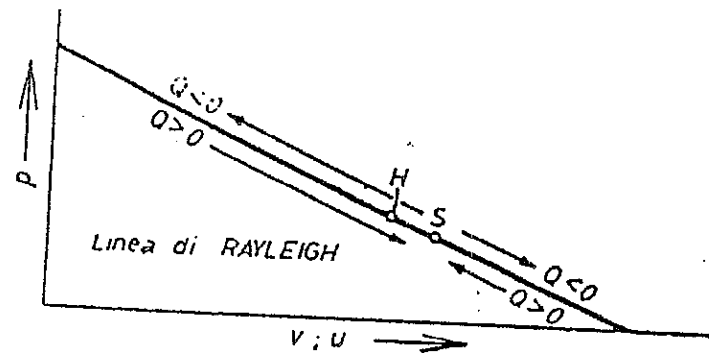


Fig. 5.1.1. - Linea di Rayleigh nel diagramma $p-v$ oppure $p-u$.

della linea di Rayleigh nel diagramma di fig. 5.1.1 risulta:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{Ray}} = -\left(\frac{W}{A}\right)^2 = -\frac{u^2}{l'^2} = -G^2 \quad (5.1.6)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_{\text{Ray}} = -\frac{W}{A} = -\frac{u}{l'} = -G. \quad (5.1.7)$$

Quindi il valore della portata specifica $G = W/A$ definisce la pendenza della linea di Rayleigh nel diagramma $p-v$ (oppure $p-u$).

Nella figura 5.1.2 è tracciata (qualitativamente)

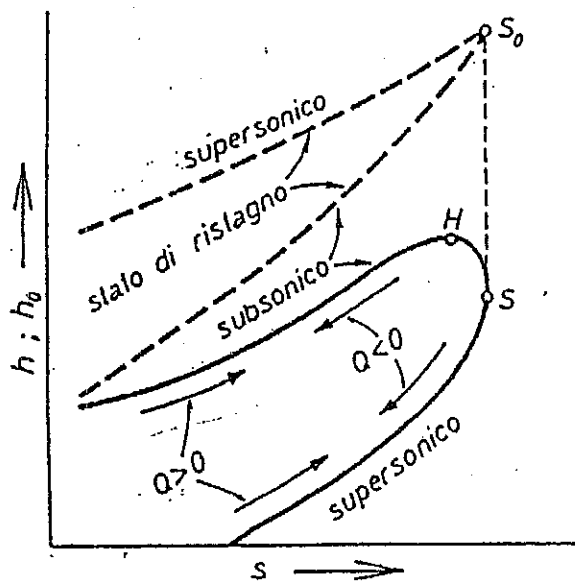


Fig. 5.1.2. - Linea di Rayleigh nel diagramma $h-s$ (di Mollier); le linee tratteggiate rappresentano gli stati di ristagno dei due rami della linea di Rayleigh, relativi a regime di moto subsonico e supersonico.

te) la linea di Rayleigh nel diagramma termodinamico entalpia-entropia ($h-s$: diagramma di Mollier). Si vede come la linea di Rayleigh presenta un punto di massima entropia (punto S) che la divide in due rami. Il ramo superiore della linea di Rayleigh è caratterizzato da moto subsonico del fluido, mentre il ramo inferiore è caratterizzato da moto supersonico del fluido: nel punto S il moto è esattamente sonico, ossia in S si ha $M = 1$. Quest'ultimo fatto si dimostra immediatamente osservando che dalla relazione (5.1.6) si ricava:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{Ray}} = u^2. \quad (5.1.6')$$

In particolare lungo la linea di Rayleigh nel punto S (di massima entropia) risulta, ricordando la (1.4.6):

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{Ray}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = c^2 \quad (5.1.8)$$

ovvero:

$$M = u/c = 1. \quad (5.1.9)$$

Nel moto di Rayleigh il fluido evolve in maniera internamente reversibile. Vale quindi la relazione (Secondo Principio della Termodinamica, cfr. (1.3.7)):

$$\delta Q = T ds. \quad (5.1.10)$$

D'altronde il Primo Principio della Termodi-

namica porge, nelle ipotesi poste per il moto di Rayleigh (cfr. (1.3.3)):

$$\delta Q = dh + d \frac{u^2}{2} = dh_0. \quad (5.1.11)$$

Dalle relazioni (5.1.10) e (5.1.11) si ricava:

$$T ds = dh_0. \quad (5.1.12)$$

La relazione (5.1.12) permette immediatamente di stabilire che il punto *S*, di massima entropia lungo la linea di Rayleigh, è anche il punto di massima entalpia totale (o entalpia di ristagno). Gli stati di ristagno della linea di Rayleigh sono rappresentati, nel diagramma di fig. 5.1.2, dalla linea tratteggiata, divisa in due rami dal punto *S*₀ (di massima entalpia totale): il ramo superiore è relativo a stati supersonici del fluido; il ramo inferiore a stati subsonici.

Si noti che il punto di massima entalpia lungo la linea di Rayleigh si trovò nel ramo di moto subsonico (punto *H*).

Considerando l'espressione del Secondo Principio della Termodinamica (5.1.10) si ricava che, nel moto di Rayleigh, fornire calore al fluido ($\delta Q > 0$) ha come conseguenza l'aumento di entropia del fluido stesso nel senso del moto; l'opposto accade sottraendo calore al fluido ($\delta Q < 0$). Nel moto subsonico perciò il numero di Mach aumenta (nel senso del moto) fornendo calore al fluido, mentre diminuisce sottraendo calore al fluido; nel moto supersonico invece il numero di Mach dimi-

nuisce fornendo calore al fluido, mentre aumenta sottraendo calore al fluido. Fornendo calore lo stato del fluido evolve sempre verso lo stato $M = 1$ (punto *S* nei diagrammi delle figure 5.1.1, 5.1.2); sottraendo calore lo stato del fluido evolve invece nel senso opposto.

5.2 MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALI.

Si suppone ora che il fluido che evolve secondo ipotesi di moto di Rayleigh sia un gas a comportamento ideale e calori specifici caratteristici costanti. In tali ipotesi si possono ricavare alcune relazioni di estrema utilità pratica. Applicando i fatti la relazione (5.1.5) tra due stati (lungo una trasformazione di Rayleigh) nei quali i valori dei parametri vengono caratterizzati con i pedici 1 e 2, tenendo conto delle relazioni (1.3.5) e (1.4.8) si ricava immediatamente:

$$p_2 (1 + kM_2^2) = p_1 (1 + kM_1^2) \quad (5.1)$$

cioè:

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}} \quad (5.2)$$

Il rapporto tra i valori delle temperature e la funzione dei numeri di Mach può essere ricavata osservando che risulta, nelle ipotesi poste:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{p_2 u_2}{p_1 u_1} = \frac{p_2 M_2 \sqrt{kRT_2}}{p_1 M_1 \sqrt{kRT_1}} \quad (5.2.3)$$

da cui risulta:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2 M_2}{p_1 M_1} \right)^2 \quad (5.2.4)$$

e quindi per la (5.2.2):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \quad (5.2.5)$$

Tenendo conto della relazione (1.5.4):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

e dalla relazione (5.2.5) si ricava per il rapporto delle temperature di ristagno:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2 (1 + kM_1^2)^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)}{M_1^2 (1 + kM_2^2)^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)} \quad (5.2.6)$$

Tenendo conto della relazione (1.5.6):

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

e della relazione (5.2.2) si ricava per il rapporto delle pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{k/(k-1)} \quad (5.2.7)$$

Nelle ipotesi poste l'equazione di continuità (1.3.5) e l'equazione di stato (1.3.8) porgono:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{T_2 p_1} \quad (5.2.8)$$

da cui, applicando le relazioni (5.2.2) e (5.2.5) si ricava:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \quad (5.2.9)$$

Anche il valore della variazione di entropia tra gli stati 1 e 2 della linea di Rayleigh può essere facilmente espresso in funzione dei numeri di Mach M_1 ed M_2 (e delle proprietà del gas ideale in considerazione). Ricordando infatti l'espressione della variazione entropica per un gas ideale:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{k/(k-1)} - \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (5.2.10)$$

applicando le relazioni (5.2.2) e (5.2.5) si ricava, dopo semplici passaggi algebrici:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right] \quad (5.2.11)$$

Le relazioni messe in evidenza più sopra nei riquadri sono di grande utilità nella soluzione di problemi pratici in ipotesi di moto di Rayleigh per gas ideale a calori specifici caratteristici costanti: gli esercizi riportati nel seguito chiariranno questo fatto.

Nella forma in cui sono scritte tali relazioni però mal si prestano ad essere diagrammate o tabulate, il primo membro dipendendo funzionalmente dal valore di due parametri, i numeri di Mach negli stati considerati, oltreché beninteso dal valore di k caratteristico del gas ideale trattato. In analogia con quanto già visto su altri tipi di deflusso, si preferisce perciò diagrammare o tabulare le espressioni che si ottengono da quelle scritte più sopra quando applicate tra uno stato generico lungo la trasformazione di Rayleigh ed un prefissato stato di riferimento lungo la medesima trasformazione. Come stato di riferimento si sceglie ovviamente quello in cui si ha $M = 1$, ed in esso i valori dei parametri si indicano con l'asterisco, es.: p^* , T^* etc. Operando quindi, nelle espressioni riportate più sopra, le sostituzioni: $M_1 = 1$, $p_1 = p^*$, $T_1 = T^*$ etc. e $M_2 = M$, $p_2 = p$, $T_2 = T$ etc. (il pedice 2 non è ora più essenziale), si ottengono le relazioni:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{k+1}{1+kM^2}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{M^2(k+1)^2}{(1+kM^2)^2}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{(1+kM^2)^2}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{k+1}{1+kM^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{k/(k-1)} \quad (5.2.12)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{u^*}{u} = \frac{1+kM^2}{(k+1)M^2}$$

$$\frac{s-s^*}{R} = \ln \left[M^{2k/(k-1)} \left(\frac{1+k}{1+kM^2} \right)^{(k+1)/(k-1)} \right]$$

Le prime cinque relazioni (5.2.12) sono tabulate in funzione del parametro M per diversi valori di k (tabelle E1, E2, E3). Dai valori tabulati si può risalire ai valori delle funzioni primitive relative a due stati qualsiasi lungo la trasformazione di Rayleigh osservando che risulta (con ovvio significato dei simboli):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(p/p^*)_{M_2}}{(p/p^*)_{M_1}}; \text{ etc.}$$

ed anche:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \left(\frac{s - s^*}{R} \right)_{M_2} - \left(\frac{s - s^*}{R} \right)_{M_1}$$

Nel caso particolare di $k = 1,4$ le relazioni (5.2.12) (esclusa l'ultima) sono diagrammate nella figura 5.2.1; qualitativamente simili a questo sono i diagrammi relativi a differenti valori di k .

Si osserverà che le relazioni fondamentali trattate non considerano i parametri entalpia h ed entalpia totale h_0 ; ciò è perché il valore di questi parametri è immediatamente calcolabile dalla conoscenza della temperatura T e della temperatura totale T_0 , valendo per gas ideali le relazioni:

$$dh = c_p dT; \quad dh_0 = c_p dT_0. \quad (5.2.13)$$

Per quanto già detto considerando le relazioni (5.1.10) e (5.1.12) le grandezze $\left(\frac{s - s^*}{R} \right)$ ed anche $\left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)$ (cfr. la (5.2.13)) devono avere andamento crescente nel senso del deflusso se il calore è fornito al fluido dall'esterno, andamento decrescente nel senso del deflusso se il calore è ceduto dal fluido all'esterno. Queste osservazioni permettono di fissare nel diagramma di fig. 5.2.1 il verso di evoluzione dei parametri del fluido nel moto di Rayleigh in dipendenza del segno dello scambio termico; le frecce a margine del diagramma mettono in evidenza il verso di evoluzione del numero di Mach M .

$$\frac{-1}{2} M^2$$

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} M^2} \right)^{k/(k-1)}$$

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} M^2} \right)^{(k+1)/(k-1)}$$

(5.2.12) sono tabulate per diversi valori di M .
Dai valori tabulati si possono ricavare le funzioni primitive lungo la trasformazione che risulta (con ovvio significato) etc.,

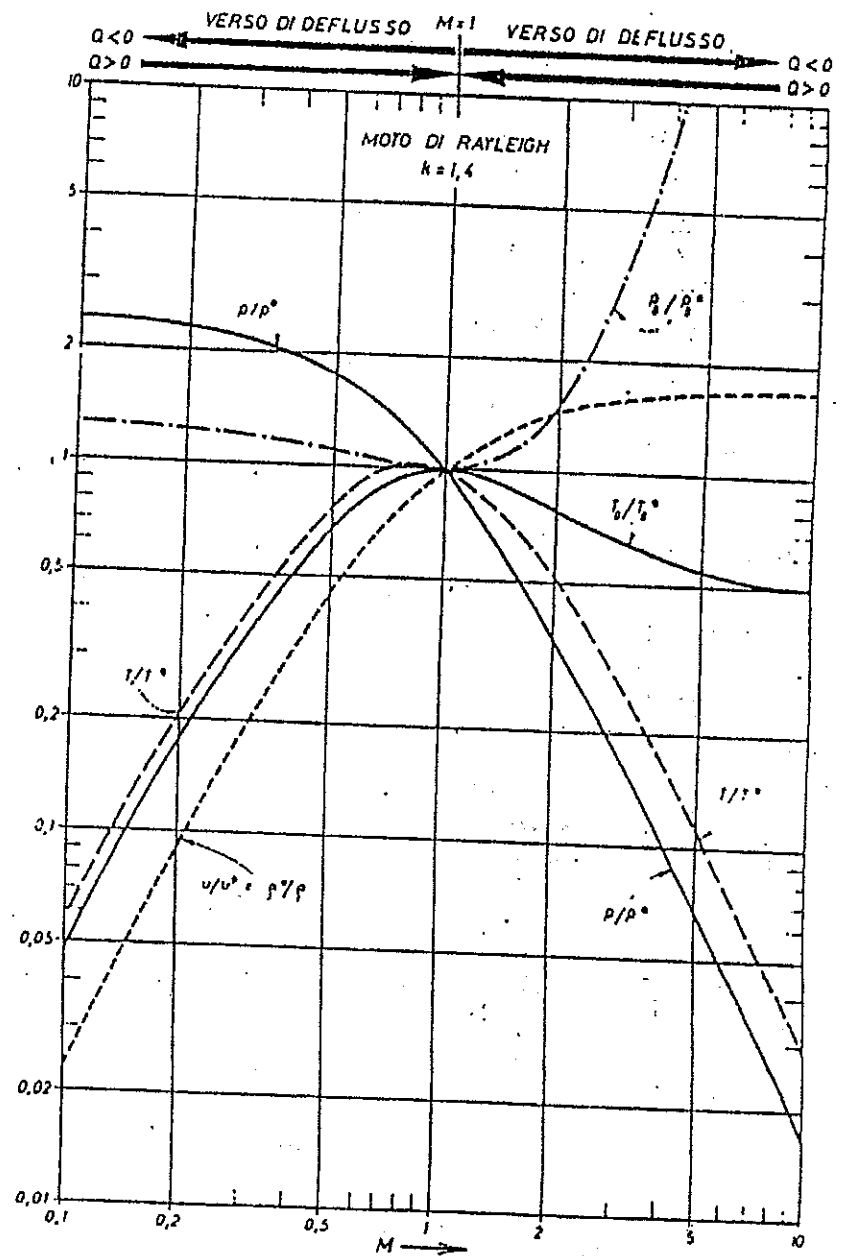


Fig. 5.2.1. - Funzioni del moto di Rayleigh per un gas ideale con $k = 1,4$.

Dalla seconda delle relazioni (5.2.12) si può inoltre facilmente ricavare che il massimo della temperatura e quindi dell'entalpia, - cfr. (5.2.13) - si ha nella linea di Rayleigh per gas ideale in corrispondenza al valore del numero di Mach $M = 1/\sqrt{k}$ (valore < 1).

Tutte queste osservazioni permettono di stabilire per il moto di Rayleigh per gas ideali la tabella riportata qui sotto.

para- metro	CALORE			
	fornito al fluido		ceduto dal fluido	
	subsonico	supersonico	subsonico	supersonico
p	cala	crece	crece	cala
T, h	crece $M < 1/\sqrt{k}$	crece	cala $M < 1/\sqrt{k}$	cala
	cala $M > 1/\sqrt{k}$		crece $M > 1/\sqrt{k}$	
p_0	cala	cala	crece	crece
T_0, h_0	crece	crece	cala	cala
ρ	cala	crece	crece	cala
u	crece	cala	cala	crece
S	crece	crece	cala	cala
M	crece	cala	cala	crece

La linea di Rayleigh per un gas ideale nel diagramma $T-s$ ha lo stesso andamento che nel diagramma $h-s$ (cfr. (5.2.13)).

PROBLEMA 5.2.1

In una camera di combustione cilindrica a sezione circolare di diametro $d = 9$ cm una portata $W = 3600$ kg/h di aria viene portata (in un processo che si assume equivalente ad un riscaldamento esterno reversibile) dalle condizioni (di ingresso) di temperatura $t_1 = 140$ °C e pressione $p_1 = 6$ ata, fino alla temperatura (di uscita) $t_2 = 850$ °C.

Considerando gas a comportamento ideale con $k = 1,4$ (costante) e massa molecolare $M_m = 28,97$ kg/kg mole, calcolare la pressione p_2 e la velocità u_2 del gas all'uscita della camera di combustione.

La velocità del gas nella sezione di ingresso si ricava immediatamente dalla relazione:

$$u_1 = \frac{W \cdot v_1}{A} = \frac{W \cdot \bar{R} \cdot T_1}{M_m \cdot p_1 \cdot \pi \cdot d^2 / 4}$$

$$= \frac{3600 \cdot 8317 \cdot (273 + 140)}{28,97 \cdot (6 \cdot 98100) \cdot 3,14 \cdot 0,09^2 / 4} \cdot \frac{1}{3600}$$

$$= 31,68 \text{ m/sec.}$$

La velocità del suono nel gas nelle condizioni in ingresso vale:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1/M_m} = \sqrt{1,4 \cdot 8317 (273 + 140)/28,97} = 407,4 \text{ m/sec}$$

da cui si ricava:

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} = 0,077.$$

Applicando le opportune relazioni (5.2.12), oppure dal relativo diagramma (estensione di quello di figura 5.2.1), o dalla tabulazione (E2 in Appendice) si valutano:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 2,380; \quad \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = 0,03419;$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 0,02853; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 0,01437.$$

Si può quindi ricavare il rapporto $\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2}$ osservando che risulta:

$$\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} = \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} \frac{T_2}{T_1} = 0,03419 \frac{850 + 273}{140 + 273} = 0,09290.$$

Risolvendo la seconda delle relazioni (5.2.12), o ricorrendo alle tabulazioni o ai diagrammi già citati, si ricava il corrispondente valore del numero di Mach nella sezione d'uscita M_2 .

Si trova:

$$M_2 = 0,13.$$

(Il valore $M_2 = 5,5$, anch'esso soluzione della seconda delle relazioni (5.2.12) in corrispondenza a $(T/T^*)_{M_2} = 0,09290$ - cfr. § 5.2.1 - non viene considerato in quanto per semplice cessione di calore non si può avere passaggio da moto subsonico a moto supersonico).

In corrispondenza a $M_2 = 0,13$ si ricava:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = 2,3445; \quad \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = 0,077; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} = 0,03965$$

Risulta anche:

$$T^* = T_1 / (T/T^*)_{M_1} = \frac{(273 + 140)}{0,03419} = 12079,6 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$T_0^* = T^* \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) = T^* \cdot 1,2 = 14495,5 \text{ }^\circ\text{K}$$

Si possono quindi calcolare le grandezze richieste come segue:

$$u_2 = u_1 \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 31,68 \frac{0,03965}{0,01437} = 87,35 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 6 \frac{2,3445}{2,38} = 5,91 \text{ ata} \quad ***$$

$$T_1 = \left[\rho_1 v_1 \left[c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right] + q_{comb} \right] / \left[\rho_2 v_2 - \frac{1}{2} v_2^2 \right] / \rho_1 = c_p (T_2 - T_0) \rho_1 \rho_2 = \frac{3}{5} \rho_1 \rho_2$$

174

$$\left(c_p T_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) \rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \left[c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right] + q_{comb} \cdot c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

CAPITULO V

MOTO DI RAYLEIGH

17

$$q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} T_0^* \left[\left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)_{M_2} - \left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)_{M_1} \right]$$

$$3600 \frac{1,4}{0,4} \frac{8317}{28,97} 14495,5 (0,0777 - 0,02853) \frac{1}{1000 \cdot 3600} \text{ kw}$$

$$716 \text{ kw}$$

$$616000 \text{ kcal/h}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{Q_{12}}{c_p} - \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{716}{0,4} - \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

Cueste relazioni coincidono con le (2.2.2) (2.2.3) e (2.2.1) nell'ordine, che, assieme all'equazione di stato del fluido, legano coppie di stati corrispondenti attraverso un'onda d'urto normale.

Il verificarsi di un'onda d'urto normale lungo un deflusso di Rayleigh dunque fa passare il fluido da uno stato sul ramo supersonico della curva di Rayleigh (stato *a*), allo stato di uguale entalpia totale sul ramo subsonico della medesima linea di Rayleigh (stato *b*).

Ciò premesso si vuole analizzare ora in dettaglio il problema di maggiore importanza pratica nel campo del moto di Rayleigh, che consiste nella determinazione dello stato finale ($p_2, T_2, u_2, M_2, T_{02}$ etc.) di un fluido che, a partire da condizioni iniziali determinate ($p_1, T_1, u_1, M_1, T_{01}$ etc.), è sottoposto (nelle ipotesi di moto di Rayleigh) allo scambio termico esterno Q_{12} (riferito all'unità di massa di fluido). Naturalmente tale scambio termico esterno potrà essere equivalentemente ottenuto mediante un processo di combustione interna, secondo quanto precisato in precedenza.

Questo problema viene trattato nell'ipotesi che il fluido evolvente sia un gas ideale a calori specifici caratteristici costanti, e ciò in aderenza con le ipotesi frequentemente assunte; molte delle conclusioni cui si perviene hanno però validità non limitata ai soli gas ideali.

Si osserva innanzitutto che la conoscenza dei parametri che caratterizzano lo stato iniziale determina una particolare curva di Rayleigh; resta tra gli altri quindi determinato il valore della tem-

5.3 STATO FINALE IN UNA TRASFORMAZIONE DI RAYLEIGH. LIMITE ALLA QUANTITÀ DI CALORE SCAMBIATA.

Si considerino innanzitutto due stati *a* e *b* di un fluido su una stessa linea di Rayleigh, aventi uguale valore dell'entalpia totale $h_{0a} = h_{0b}$; lo stato *a* sia sul ramo supersonico e lo stato *b* sul ramo subsonico della linea di Rayleigh. Si riconosce immediatamente che *a* e *b* sono stati che si corrispondono in un'onda d'urto normale. Essendo essi stati di una stessa linea di Rayleigh risulterà infatti, per le (5.1.2) e (5.1.5):

$$\rho_a u_a = \rho_b u_b \quad (5.3.1)$$

$$p_a + \rho_a u_a^2 = p_b + \rho_b u_b^2 \quad (5.3.2)$$

Ed inoltre, per le ipotesi poste:

$$h_a + \frac{u_a^2}{2} = h_b + \frac{u_b^2}{2} \quad (5.3.3)$$

$$\rho v_1 = \frac{100}{3 \text{ m}^2} \cdot \frac{5}{30} = \frac{5}{6} \text{ m}^2$$

con le (2.2.2),
 assieme all'equa-
 ppie di stati cor-
 urto normale.
 o normale lungo
 passare il flui-
 nico della curva
 uguale entalpia
 desima linea di
 zare ora in det-
 portanza pratica
 che consiste nel-
 e ($p_2, T_2, u_2, M_2,$
 re da condizioni
 T_{01} etc.), è sot-
 Rayleigh) allo
 rito all'unità di
 le scambio ter-
 lentamente, otte-
 bustione interna,
 denza.
 o nell'ipotesi che
 le a calori spe-
 in aderenza con
 molte delle con-
 d validità non li-

conoscenza del
 stato iniziale de-
 Rayleigh; resta
 valore della tem-

peratura di ristagno massima su questa curva di Rayleigh T_0^* che, come si è visto, è relativo allo stato a numero di Mach $M = 1$: questo valore è calcolabile, noti M_1 e T_{01} , dalla terza delle relazioni (5.2.12). Noto inoltre il valore della quantità di calore scambiata per unità di massa del fluido evolvente Q_{12} , si può calcolare il valore della temperatura di ristagno T_{02} nello stato finale della trasformazione:

$$Q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) = \frac{k}{k-1} R (T_{02} - T_{01}). \quad (5.3.4)$$

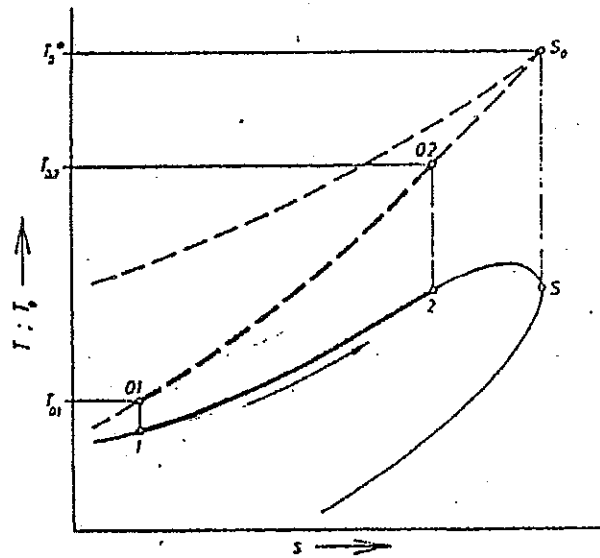


Fig. 5.3.1. - Trasformazione di Rayleigh $1 \rightarrow 2$ con condizioni iniziali subsoniche (stato 1). La quantità di calore scambiata dall'unità di massa di fluido è inferiore a quella massima compatibile con le condizioni iniziali.

Si supponga dapprima $Q_{12} > 0$, da cui segue $T_{02} > T_{01}$; potrà allora risultare $T_{02} \leq T_0^*$ oppure $T_{02} > T_0^*$.

Caso 1a ($Q_{12} > 0; T_{02} \leq T_0^*$): il problema ammette soluzione. In particolare se il moto è inizialmente subsonico (cfr. fig. 5.3.1) lo stato finale della trasformazione è univocamente determinato come lo stato a temperatura di ristagno T_{02} sul ramo subsonico della curva di Rayleigh.

Se il moto fosse inizialmente supersonico (cfr. fig. 5.3.2) il fluido potrebbe evolvere fino allo sta-

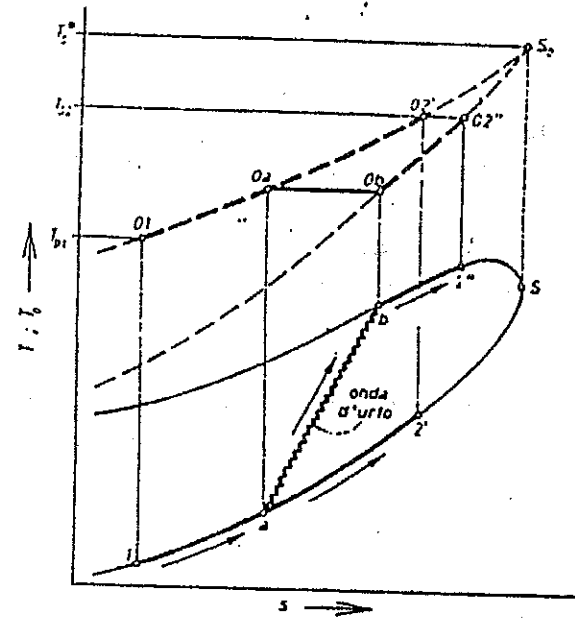


Fig. 5.3.2. - Trasformazione di Rayleigh ($1 \rightarrow 2'$ oppure $1 \rightarrow 2''$) con condizioni iniziali supersoniche (stato 1). La quantità di calore scambiata dall'unità di massa di fluido è inferiore a quella massima compatibile con le condizioni iniziali.

to 2' sul ramo supersonico della linea di Rayleigh, oppure fino allo stato 2'' sul ramo subsonico della curva di Rayleigh, entrambi questi stati essendo caratterizzati dal valore T_{02} della temperatura di ristagno. Nel caso della trasformazione $1 \rightarrow 2''$ si avrebbe formazione di un'onda d'urto che fa passare il fluido da un generico stato a sul ramo supersonico della curva di Rayleigh allo stato b sul ramo subsonico della medesima curva di Rayleigh, con $T_{0a} = T_{0b}$; il fluido evolverà fino allo stato 2' ($M > 1$) oppure 2'' ($M < 1$) in dipendenza di altri fattori che possono condizionare il moto, quali ad esempio la pressione imposta allo sbocco del condotto etc.

Se fosse esattamente $T_{02} = T_0^*$ il fluido evolverebbe fino allo stato a numero di Mach $M = 1$ (di massima temperatura totale) sulla linea di Rayleigh.

Caso Ib ($Q_{12} > 0$; $T_{02} > T_0^*$): in questo caso il problema non ammette soluzione, in quanto la quantità di calore che s'impone al fluido di scambiare Q_{12} è maggiore della quantità massima di calore che, fissato lo stato iniziale della trasformazione, il fluido può scambiare lungo una trasformazione di Rayleigh. Questa quantità massima di calore è data ovviamente dalla relazione:

$$Q_{\max} = c_p(T_0^* - T_{01}). \quad (5.3.5)$$

Se è imposta la quantità di calore Q_{12} che l'unità di massa del fluido deve scambiare vi dovrà essere necessariamente un mutamento delle condi-

zioni iniziali del deflusso tale da rendere possibile l'aumento imposto della temperatura di ristagno del fluido stesso.

Quanto detto più sopra trattando i casi *Ia* e *Ib* può essere espresso osservando che, fissate le condizioni iniziali di deflusso, resta determinata nel moto di Rayleigh con $Q > 0$ il valore del rapporto $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1}$, (cfr. fig. 5.3.3) e quindi del gruppo adimensionale:

$$\left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1} = \frac{T_0^* - T_{01}}{T_{01}} = \left[\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1}\right]^{-1} - 1.$$

La quantità di calore Q_{12} che si vuole far scambiare all'unità di massa di fluido in un moto di Rayleigh a partire dalle condizioni iniziali fissate determina il valore del gruppo adimensionale $Q_{12}/(c_p T_{01})$. Se risulta:

$$\left(\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right) \leq \left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1}$$

il moto è possibile. Quando invece risulta:

$$\left(\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right) > \left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1}$$

le condizioni fissate non sono compatibili con il moto di Rayleigh.

Il gruppo adimensionale $\left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_M$ gioca quindi

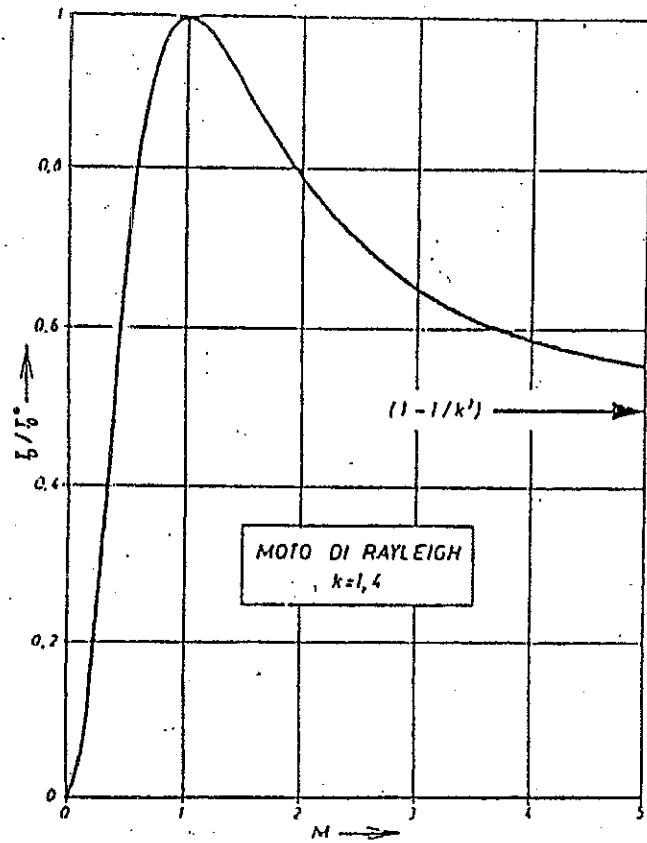


Fig. 5.3.3. - Funzione (T_0/T_0^*) per il moto di Rayleigh di un gas ideale con $k = 1,4$.

nel moto di Rayleigh con $Q > 0$, lo stesso ruolo del parametro $f \frac{l_{max}}{d}$ nel moto di Fanno.

Caso II ($Q_{12} < 0$): questa situazione è assai meno interessante dal punto di vista pratico applicativo delle precedenti. Si osserva comunque che la

temperatura di ristagno T_0 tende al valore limite $(1 - 1/k^2)T_0^*$ al tendere del numero di Mach all'infinito (cfr. fig. 5.3.3) e quindi la quantità di calore massima che si può sottrarre al fluido inizialmente a temperatura di ristagno T_{01} in un moto di Rayleigh sempre supersonico è data da:

$$|Q_{max}| = c_p [T_{01} - (1 - 1/k^2)T_0^*] \quad (5.3.6)$$

Si potrà naturalmente avere formazione di una onda d'urto che fa passare il fluido dal ramo supersonico al ramo subsonico della curva di Rayleigh, fermo restando il valore della temperatura di ristagno.

Il ramo subsonico della curva di Rayleigh si estende fino a valore nullo della temperatura di ristagno, che si ha in corrispondenza a $M = 0$.

PROBLEMA 5.3.1

Nella camera di combustione cilindrica di un motore a getto l'aria entra alla velocità $u_1 = 115$ m/sec, alla temperatura $t_1 = 93$ °C ed alla pressione $p_1 = 4,2$ ata.

Se il processo di combustione viene trattato come equivalente ad uno scambio termico esterno della quantità di calore (per unità di massa di fluido) $Q_{12} = 121,7$ kcal/kg, calcolare (assumendo ipotesi di moto di Rayleigh per gas ideale con $c_p = 0,24$ kcal/(kg°K), $k = 1,4$ (costante) e $M_m = 28,97$): la temperatura di ristagno T_{02} , il numero di Mach

M_2 , la temperatura T_2 , la pressione p_2 e la velocità u_2 del gas all'uscita della camera di combustione.

Si valuta innanzitutto la velocità del suono nelle condizioni di ingresso:

$$c_1 = \sqrt{k \frac{R}{M_m} T_1} = \sqrt{1,4 (8317/28,97) (93 + 273)} = 383,5 \text{ m/sec}$$

da cui deriva:

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} = \frac{115}{383,5} = 0,3.$$

Applicando le opportune relazioni (5.2.12), oppure dal diagramma di fig. 5.2.1 o ancora dalle tabulazioni (E2 in Appendice) si possono valutare:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 0,34686; \quad \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = 0,40887;$$

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 2,1314; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 0,19183.$$

Si calcola quindi $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2}$ come segue:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} \left[1 + \frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right];$$

$$T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) = (273 + 93)(1 + 0,2 \cdot 0,3^2) = 372,6^\circ \text{K}$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = 0,34686 \left(1 + \frac{121,7}{0,24 \cdot 372,6}\right) = 0,81892.$$

Questo valore del rapporto $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)$ permette di ricavare, dalle tabelle già citate, il numero di Mach allo sbocco M_2 (necessariamente minore dell'unità). Si trova:

$$M_2 = 0,6 \quad ***$$

ed in corrispondenza:

$$\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} = 0,9167; \quad \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = 1,5957; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} = 0,57447.$$

Si può ora calcolare immediatamente il valore dei parametri richiesti come segue:

$$T_{02} = T_{01} \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 372,6 \cdot 0,81892 / 0,34686 = 879,7^\circ \text{K} \quad ***$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = (273 + 93) \cdot 0,9167 / 0,40887 = 820,6^\circ \text{K} \quad ***$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 4,2 \cdot 1,5957 / 2,1314 = 3,14 \text{ ata} \quad ***$$

$$u_2 = u_1 \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 115 \cdot 0,57447 / 0,19183 = 344 \text{ m/sec.} \quad ***$$

5.4 MOTO DI RAYLEIGH CON CONDIZIONI DI RISTAGNO INIZIALI FISSATE. LIMITAZIONE DI PORTATA.

Come applicazione di quanto esposto nel paragrafo precedente si vuole qui analizzare in dettaglio il moto di Rayleigh ($Q \geq 0$) in un condotto a sezione costante di area A alimentato tramite un convergente da un serbatoio in cui le condizioni del fluido (supposto gas ideale) sono fissate - cfr. fig. 5.4.1. Poiché nel convergente si ipotizza moto isoentropico, nel condotto a sezione costante ha luogo un moto di Rayleigh con condizioni di ristagno p_{01} e T_{01} fissate nella sezione iniziale 1. Si vogliono esaminare le condizioni di moto al variare della pressione di scarico del condotto p_s per differenti valori della quantità di calore Q_{12} ceduta all'unità di massa di fluido.

Nel caso (limite) che risulti $Q_{12} = 0$ il moto è dovunque isoentropico; le condizioni del fluido

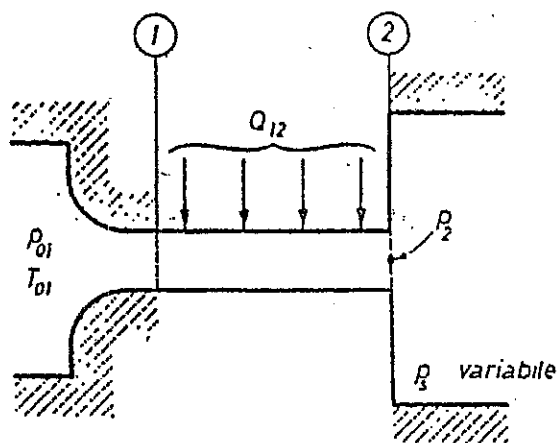


Fig. 5.4.1. - Moto di Rayleigh in un condotto alimentato da un ugello convergente.

non variano nel tratto di condotto a sezione costante ed il moto ha, in funzione della pressione allo scarico p_s , le caratteristiche dedotte nel § 3.4 per l'ugello convergente. In particolare al decrescere della pressione di scarico p_s a partire dal valore p_{01} la portata W ed il numero di Mach allo sbocco $M_2 (= M_1)$ crescono fino a che risulta $M_2 = M_1 = 1$, condizione che si ottiene quando (cfr. (3.2.4)) ⁽¹⁾:

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \left(\frac{p^*}{p_{01}} \right)_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.4.1)$$

In corrispondenza a questo valore della pressione allo scarico p_s la portata raggiunge il valore massimo $(W_{\max})_s$, dato dalla (cfr. la relazione (3.3.4)):

$$(W_{\max})_s = A \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.4.2)$$

Per pressioni allo scarico ancora più basse, cioè per $\frac{p_s}{p_{01}} < \left(\frac{p^*}{p_{01}} \right)_s$, la pressione p_2 e tutti gli altri parametri che caratterizzano il deflusso nel condotto conservano il medesimo valore assunto quando risultava $(p_s/p_{01}) = (p^*/p_{01})_s$; si ha sempre $W = (W_{\max})_s$ e $M_2 = M_1 = 1$ e l'espansione del flui-

⁽¹⁾ Il pedice s viene qui usato per sottolineare che il rapporto (p^*/p_{01}) è relativo a condizioni di deflusso isoentropiche.

do dal valore di pressione p_2 allo sbocco al valore p_s di scarico ha luogo, con onde di espansione esterne, a valle della sezione di sbocco 2. L'andamento della portata W in funzione della pressione di scarico p_s si può ricavare (per gas ideale con $k = 1,4$) dalla curva con parametro $Q_{12}/(c_p T_{01}) = 0$ nel diagramma di fig. 5.4.2; la variabile parametrica e le coordinate sono state così scelte in quanto consentono di generalizzare i risultati.

Si consideri ora il caso che venga fornito calore (positivo) Q_{12} all'unità di massa di fluido nel condotto a sezione costante. Il valore di Q_{12} e le

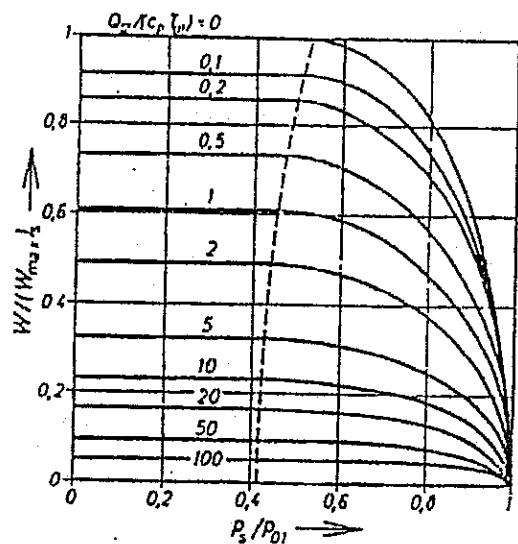


Fig. 5.4.2. - Variazione della portata W in funzione della pressione di scarico p_s relativamente al moto di Rayleigh di un gas ideale ($k = 1,4$) in un condotto alimentato da un ugello convergente (cfr. fig. 5.4.1), per diversi valori del parametro di scambio termico $Q_{12}/(c_p T_{01})$.

condizioni del fluido nel serbatoio permettono di calcolare il valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, ed anche il rapporto tra le temperature di ristagno $(T_{02}/T_{01})_R$ ⁽¹⁾ agli estremi del condotto a sezione costante ove ha luogo il deflusso di Rayleigh:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_R = \frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} + 1. \quad (5.4.3)$$

Il valore del rapporto $(T_{02}/T_{01})_R$ fissa, tramite la relazione (5.2.6), il legame tra il numero di Mach M_2 allo sbocco ed il numero di Mach M_1 all'imbocco del condotto a sezione costante. Trattandosi di moto subsonico con cessione di calore al fluido ($T_{02} > T_{01}$), risulterà sempre $M_2 > M_1$ (si veda anche il diagramma di fig. 5.2.1, tenendo conto che, nel caso considerato, risulta:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_R = \left(\frac{T_{02}}{T_0^*}\right)_R / \left(\frac{T_{01}}{T_0^*}\right)_R > 1$$

e che il regime di moto è necessariamente subsonico, con al più condizioni soniche in 2); si può inoltre osservare che M_2 ed M_1 variano in verso concorde.

Fissate le condizioni di ristagno del gas a monte ed il valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, il valore del numero di Mach M_2 allo sbocco (e quindi anche il valore del numero di Mach M_1) dipen-

⁽¹⁾ Il pedice R è qui usato per sottolineare che il rapporto (T_{02}/T_{01}) è relativo a deflusso di Rayleigh.

de dalla pressione p_s imposta allo scarico del condotto, ed anche quindi dal rapporto p_s/p_{01} . Il legame funzionale tra queste grandezze (per $M_2 < 1$, risultando allora $p_s = p_2$) si ricava osservando che risulta:

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_R \cdot \left(\frac{p_1}{p_{01}}\right) \quad (5.4.4)$$

Il rapporto $(p_2/p_1)_R$ nella (5.4.4) può essere espresso in funzione di M_1 ed M_2 a mezzo della relazione (5.2.2), mentre il rapporto (p_1/p_{01}) è esprimibile in funzione di M_1 tramite la relazione (1.5.6).

Ad ogni valore del numero di Mach nella sezione di sbocco M_2 , tramite il relativo valore di M_1 , corrisponde inoltre un valore di portata W calcolabile a mezzo della relazione (3.3.3):

$$W = A \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} M_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}} \quad (5.4.5)$$

e quindi, per la (5.4.2), un valore del rapporto $W/(W_{\max})_s$, che risulta indipendente dalle condizioni di ristagno del gas nel serbatoio e dall'area della sezione del condotto A .

Facendo quindi variare il numero di Mach M_2 tra i limiti $0 \leq M_2 < 1$ si può tracciare la corrispondenza funzionale tra $p_s/p_{01} = (p_2/p_{01})$ e $W/(W_{\max})_s$, per differenti valori del rapporto $Q_{12}/(c_p T_{01})$: si ottengono, per gas ideale con $k = 1,40$, i tratti di

curva a destra della linea tratteggiata del diagramma di fig. 5.4.2.

Da quanto detto sopra si ricava che, fissata la geometria del condotto, le condizioni di ristagno a monte ed il calore Q_{12} scambiato dall'unità di massa del fluido, al decrescere della pressione di scarico p_s a partire dal valore p_{01} , il numero di Mach nella sezione di sbocco cresce (a partire dal valore nullo) fino a raggiungere valore unitario; corrispondentemente il numero di Mach M_1 nella sezione ove inizia il moto di Rayleigh cresce (a partire da valore nullo) fino a raggiungere un valore massimo $M_{1\max}$ dipendente dalle condizioni inizialmente fissate; anche la portata di massa W cresce (a partire da valore nullo) fino a raggiungere un valore massimo W_{\max} dipendente dalle condizioni inizialmente fissate.

Il valore di $M_{1\max}$, corrispondendo alla situazione $M_2 = 1$, è legato al valore del rapporto (T_{02}/T_{01}) (e quindi, tramite la (5.4.3), al valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$) dalla terza delle relazioni (5.2.12) ove si ponga:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right) = \frac{T_{01}}{T_{02}} \quad \text{e} \quad M = M_{1\max}$$

Si vede quindi che tanto maggiore è il valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, tanto minore è il valore di $M_{1\max}$ (cfr. diagramma di fig. 5.2.1) e conseguentemente tanto minore è il valore di W_{\max} (per la (5.4.5) la portata W è funzione crescente di M , per $0 < M < 1$ e $k > 1$).

La linea tratteggiata nel diagramma di figura 5.4.2 è il luogo dei punti per i quali risulta $p_2 = p_s$ e $M_2 = 1$, e quindi $W = W_{\max}$ e $M_1 = M_{1\max}$. Le altre condizioni operative rimanendo invariate, un ulteriore abbassamento della pressione di scarico p_s al di sotto di questo valore non modifica le condizioni di moto nel condotto, e la pressione passa dal valore p_2 allo sbocco del condotto al valore p_s imposto allo scarico con un'espansione esterna al condotto stesso. Le curve di fig. 5.4.2 si completano pertanto con segmenti di retta paralleli all'asse delle ascisse a sinistra della linea tratteggiata.

Il diagramma in fig. 5.4.2 permette di sottolineare alcuni aspetti di grande interesse applicativo riguardanti le condizioni operative di un condotto come rappresentato in fig. 5.4.1:

1) Fissate le condizioni di ristagno a monte e la geometria del condotto, la quantità di calore Q_{12} che l'unità di massa di fluido deve scambiare ($Q_{12} > 0$) determina un valore massimo di portata che non può essere superato, per quanto bassa venga mantenuta la pressione di scarico p_s . Si ritrova così il medesimo fenomeno della limitazione della portata (chocking) già incontrato nel moto isoentropico e nel moto adiabatico con attrito (di Fanno) alimentato in condizioni di ristagno fissate. Questo parallelismo tra moto di Rayleigh e moto di Fanno (cui si è già accennato nel paragrafo precedente) è evidenziato dal confronto del diagramma di fig. 5.4.2 con quello di fig. 4.6.4.

2) Tutte le altre condizioni operative (stato di

ristagno a monte e pressione di scarico p_s) e la geometria del condotto rimanendo invariate, un aumento (una diminuzione) della quantità di calore Q_{12} che viene imposta all'unità di massa di fluido di scambiare ha come conseguenza una riduzione (un aumento) della portata di fluido attraverso il condotto. Il punto operativo si sposta infatti, variando la quantità di calore Q_{12} , verso valori maggiori (aumento di Q_{12}) o minori (diminuzione di Q_{12}) del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, rimanendo invariato il valore dell'ascissa p_s/p_{01} ; pure invariato rimane il valore della portata massima isoentropica (W_{\max})_s. Si osservi che variazioni di Q_{12} possono essere equivalentemente ottenute in una combustione variando il rapporto combustibile/comburente, quando tale rapporto si mantenga sempre minore del valore stechiometrico.

PROBLEMA 5.4.1

Attraverso un condotto formato da un ugello convergente adiabatico seguito da un tratto cilindrico a sezione circolare ove viene scambiato calore, una portata $W = 20000$ kg/h di aria (che, nelle ipotesi poste in questo problema, può essere trattata come gas ideale con $k = 1,4$ (costante) e $M_m = 28,97$) defluisce da un serbatoio mantenuto nelle condizioni di pressione $p_{01} = 7$ ata e di temperatura $T_{01} = 300$ °K, fino ad un ambiente a pressione p_s . Allo sbocco del condotto si vogliono avere le condizioni di numero di Mach $M_2 = 0,8$ e

di temperatura $T_2 = 1200$ °K. Ipotezzando moto isentropico nell'ugello, e moto di Rayleigh nel tratto cilindrico di condotto, calcolare:

a) il flusso termico q_{12} scambiato lungo il condotto;

b) il diametro d del tratto cilindrico del condotto;

c) la pressione nell'ambiente di scarico p_s .

a) Si valuta innanzitutto la temperatura di ristagno nella sezione di sbocco, che per la (1.5.4) risulta:

$$T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \\ = 1200 (1 + 0,2 \cdot 0,8^2) = 1353,6 \text{ °K}$$

da cui si ha immediatamente:

$$Q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} (T_{02} - T_{01}) = \\ = 1059000 \text{ joule/kg}$$

ed infine:

$$q_{12} = W \cdot Q_{12} = 20000 \cdot 1059000 / 4186 \\ = 5,06 \cdot 10^6 \text{ kcal/h.} \quad ***$$

b) Vengono utilizzate le funzioni del moto di Rayleigh (5.2.12) o la relativa tabulazione in Appendice (E2):

$$M_2 = 0,8 \rightarrow \left(\frac{T_{02}}{T_0^{**}} \right)_R = 0,96395$$

$$\left(\frac{T_{01}}{T_0^{**}} \right)_R = \left(\frac{T_{02}}{T_0^{**}} \right)_R / \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{0,96395}{4,512} = 0,21364$$

da cui segue: $M_1 = 0,2248$.

Dalla relazione (5.4.5) risulta:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{\frac{k}{R \cdot T_{01}}} p_{01} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} = 603,9 \text{ kg/(m}^2\text{sec)}$$

da cui segue:

$$A = W / (W/A) = \frac{20000}{603,9 \cdot 3600} = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0,108 \text{ m.} \quad ***$$

c) Essendo $M_2 < 1$, risulta $p_s = p_2$. Per valutare p_2 , bisogna prima valutare la pressione p_1 nella sezione iniziale del tratto cilindrico del condotto; per la (1.5.6) risulta:

$$p_1 = \frac{p_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{k(k-1)}} = 6,758 \text{ ata.}$$

Si può infine applicare la relazione (5.2.2):

$$p_s = p_2 = p_1 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \\ = 6,758 \frac{1 + 1,4 \cdot 0,2248^2}{1 + 1,4 \cdot 0,8^2} = 3,816 \text{ ata} \quad ***$$

Si può anche calcolare $(W_{\max})_s/A$:

$$(W_{\max})_s/A = \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}}$$

$$= 1602 \text{ kg/(m}^2\text{sec)}$$

e quindi risultando:

$$W/(W_{\max})_s = 0,3769$$

$$\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} = 3,512$$

$$\frac{p_s}{p_{01}} = 0,5452$$

verificare che i risultati sono coerenti con le indicazioni del diagramma di fig. 5.4.2.

APPENDICI

Appendice A1

FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ
DI RISTAGNO PER GAS IDEALE

$k = 1,3$

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\bar{p}}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
0	∞	1,0000	1,0000	1,0000	∞
0,05	11,721	0,9984	0,9988	0,9996	11,702
0,10	5,885	0,9936	0,9951	0,9985	5,848
0,15	3,952	0,9855	0,9889	0,9966	3,895
0,20	2,994	0,9744	0,9803	0,9940	2,917
0,25	2,426	0,9603	0,9694	0,9907	2,330
0,30	2,054	0,9435	0,9563	0,9867	1,938
0,35	1,793	0,9241	0,9411	0,9820	1,657
0,40	1,602	0,9023	0,9240	0,9766	1,446
0,45	1,459	0,8784	0,9051	0,9705	1,281
0,50	1,348	0,8526	0,8845	0,9638	1,1491
0,55	1,261	0,8251	0,8625	0,9566	1,0407
0,60	1,193	0,7962	0,8392	0,9488	0,9501
0,65	1,139	0,7662	0,8148	0,9404	0,8731
0,70	1,0972	0,7354	0,7895	0,9315	0,8069
0,75	1,0644	0,7040	0,7634	0,9222	0,7493
0,80	1,0395	0,6723	0,7367	0,9124	0,6988
0,85	1,0214	0,6403	0,7096	0,9022	0,6540
0,90	1,0092	0,6084	0,6823	0,8917	0,6140
0,95	1,0022	0,5768	0,6549	0,8808	0,5781
1,00	1,0000	0,5457	0,6276	0,8696	0,5457
1,05	1,0021	0,5152	0,6004	0,8581	0,5163
1,10	1,0083	0,4854	0,5735	0,8464	0,4895
1,15	1,0183	0,4565	0,5470	0,8345	0,4649
1,20	1,0321	0,4285	0,5210	0,8224	0,4423
1,25	1,0495	0,4015	0,4956	0,8102	0,4214
1,30	1,0704	0,3756	0,4709	0,7978	0,4021

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
1,35	1,0948	0,3509	0,4468	0,7853	0,3842
1,40	1,123	0,3273	0,4235	0,7728	0,3675
1,45	1,154	0,3049	0,4010	0,7603	0,3519
1,50	1,189	0,2836	0,3793	0,7477	0,3374
1,55	1,228	0,2635	0,3585	0,7351	0,3237
1,60	1,271	0,2446	0,3385	0,7225	0,3109
1,65	1,318	0,2268	0,3194	0,7100	0,2989
1,70	1,369	0,2101	0,3011	0,6976	0,2875
1,75	1,424	0,1944	0,2836	0,6852	0,2768
1,80	1,484	0,1797	0,2670	0,6729	0,2667
1,85	1,549	0,1660	0,2513	0,6607	0,2571
1,90	1,618	0,1533	0,2364	0,6487	0,2481
1,95	1,693	0,1415	0,2222	0,6368	0,2395
2,00	1,773	0,1305	0,2087	0,6250	0,2313
2,05	1,859	0,1203	0,1960	0,6134	0,2236
2,10	1,951	0,1108	0,1841	0,6019	0,2162
2,15	2,050	0,1020	0,1728	0,5905	0,2092
2,20	2,156	0,0939	0,1621	0,5793	0,2025
2,25	2,268	0,08645	0,1521	0,5684	0,1961
2,30	2,388	0,07955	0,1427	0,5576	0,1900
2,35	2,517	0,07318	0,1338	0,5470	0,1842
2,40	2,654	0,06731	0,1254	0,5365	0,1786
2,45	2,799	0,06190	0,1176	0,5262	0,1733
2,50	2,954	0,05692	0,1103	0,5161	0,1682
2,55	3,119	0,05234	0,1034	0,5062	0,1633
2,60	3,295	0,04813	0,09693	0,4965	0,1586
2,65	3,482	0,04426	0,09087	0,4870	0,1541
2,70	3,681	0,04070	0,08520	0,4777	0,1498
2,75	3,892	0,03743	0,07988	0,4686	0,1457
2,80	4,116	0,03442	0,07490	0,4596	0,1417
2,85	4,354	0,03166	0,07024	0,4508	0,1379
2,90	4,607	0,02913	0,06587	0,4422	0,1342

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
2,95	4,875	0,02680	0,06178	0,4338	0,1307
3,00	5,160	0,02466	0,05796	0,4255	0,12726
3,50	9,110	0,01090	0,03092	0,3524	0,09926
4,00	15,94	0,00498	0,01692	0,2941	0,07934
4,50	27,39	0,00236	0,00954	0,2477	0,06471
5,00	45,95	0,00117	0,00555	0,2105	0,05372
6,00	120,1	321(10) ⁻⁶	0,00206	0,15625	0,03856
7,00	285,3	101(10) ⁻⁶	847(10) ⁻⁶	0,11976	0,02882
8,00	625,2	360(10) ⁻⁷	382(10) ⁻⁶	0,09434	0,02251
9,00	1275	141(10) ⁻⁷	186(10) ⁻⁶	0,07605	0,01798
10,00	2438	605(10) ⁻⁸	968(10) ⁻⁷	0,06250	0,01475
∞	∞	0	0	0	0

Appendice A2

FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ
DI RISTAGNO PER GAS IDEALE

$$k = 1,4$$

$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
0,4338	0,1307
0,4255	0,12726
0,3524	0,09926
0,2941	0,07934
0,2477	0,06471
0,2105	0,05372
0,15625	0,03856
0,11976	0,02882
0,09434	0,02251
0,07605	0,01798
0,06250	0,01475
0	0

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
0	∞	1,00000	1,00000	1,00000	∞
0,05	11,592	0,99825	0,99875	0,99950	11,571
0,10	5,8218	0,99303	0,99502	0,99800	5,7812
0,15	3,9103	0,98441	0,98884	0,99552	3,8493
0,20	2,9635	0,97250	0,98027	0,99206	2,8820
0,25	2,4027	0,95745	0,96942	0,98765	2,3005
0,30	2,0351	0,93947	0,95638	0,98232	1,9119
0,35	1,7780	0,91877	0,94128	0,97608	1,6336
0,40	1,5901	0,89562	0,92428	0,96899	1,4241
0,45	1,4487	0,87027	0,90552	0,96108	1,2607
0,50	1,3398	0,84302	0,88517	0,95238	1,12951
0,55	1,2550	0,81416	0,86342	0,94295	1,02174
0,60	1,1882	0,78400	0,84045	0,93284	0,93155
0,65	1,1356	0,75283	0,81644	0,92208	0,85493
0,70	1,09437	0,72092	0,79158	0,91075	0,78896
0,75	1,06242	0,68857	0,76603	0,89888	0,73155
0,80	1,03823	0,65602	0,74000	0,88652	0,68110
0,85	1,02067	0,62351	0,71361	0,87374	0,63640
0,90	1,00886	0,59126	0,68704	0,86058	0,59650
0,95	1,00214	0,55946	0,66044	0,84710	0,56066
1,00	1,00000	0,52828	0,63394	0,83333	0,52828
1,05	1,00202	0,49787	0,60765	0,81933	0,49888
1,10	1,00793	0,46835	0,58169	0,80515	0,47206
1,15	1,01746	0,43983	0,55616	0,79083	0,44751
1,20	1,03044	0,41238	0,53114	0,77640	0,42493
1,25	1,04676	0,38606	0,50670	0,76190	0,40411
1,30	1,06631	0,36092	0,48291	0,74738	0,38484

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
1,35	1,08904	0,33697	0,45980	0,73287	0,36697
1,40	1,1149	0,31424	0,43742	0,71839	0,35036
1,45	1,1440	0,29272	0,41581	0,70397	0,33486
1,50	1,1762	0,27240	0,39498	0,68965	0,32039
1,55	1,2115	0,25326	0,37496	0,67545	0,30685
1,60	1,2502	0,23527	0,35573	0,66138	0,29414
1,65	1,2922	0,21839	0,33731	0,64746	0,28221
1,70	1,3376	0,20259	0,31969	0,63372	0,27099
1,75	1,3865	0,18782	0,30287	0,62016	0,26042
1,80	1,4390	0,17404	0,28682	0,60680	0,25044
1,85	1,4952	0,16120	0,27153	0,59365	0,24102
1,90	1,5552	0,14924	0,25699	0,58072	0,23211
1,95	1,6193	0,13813	0,24317	0,56802	0,22367
2,00	1,6875	0,12780	0,23005	0,55556	0,21567
2,05	1,7600	0,11823	0,21760	0,54333	0,20808
2,10	1,8369	0,10935	0,20580	0,53135	0,20087
2,15	1,9185	0,10113	0,19463	0,51962	0,19403
2,20	2,0050	0,09352	0,18405	0,50813	0,18751
2,25	2,0964	0,08648	0,17404	0,49689	0,18130
2,30	2,1931	0,07997	0,16458	0,48591	0,17539
2,35	2,2953	0,07396	0,15564	0,47517	0,16975
2,40	2,4031	0,06840	0,14720	0,46468	0,16437
2,45	2,5168	0,06327	0,13922	0,45444	0,15923
2,50	2,6367	0,05853	0,13169	0,44444	0,15432
2,55	2,7630	0,05415	0,12458	0,43469	0,14963
2,60	2,8960	0,05012	0,11787	0,42517	0,14513
2,65	3,0359	0,04639	0,11154	0,41589	0,14083
2,70	3,1830	0,04295	0,10557	0,40684	0,13671
2,75	3,3376	0,03977	0,09994	0,39801	0,13276
2,80	3,5001	0,03685	0,09462	0,38941	0,12897
2,85	3,6707	0,03415	0,08962	0,38102	0,12534
2,90	3,8498	0,03165	0,08489	0,37286	0,12185

APPENDICE A2

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
2,95	4,0376	0,02935	0,08043	0,36490	0,11850
3,00	4,2346	0,02722	0,07623	0,35714	0,11528
3,50	6,7896	0,01311	0,04523	0,28986	0,08902
4,00	10,719	0,00658	0,02766	0,23810	0,07059
4,50	16,562	0,00346	0,01745	0,19802	0,05723
5,00	25,000	$189(10)^{-5}$	0,01134	0,16667	0,04725
6,00	53,189	$633(10)^{-6}$	0,00519	0,12195	0,03368
7,00	104,143	$242(10)^{-6}$	0,00261	0,09259	0,02516
8,00	190,109	$102(10)^{-6}$	0,00141	0,07246	0,01947
9,00	327,189	$474(10)^{-7}$	0,000815	0,05814	0,01550
10,00	535,938	$236(10)^{-7}$	0,000495	0,04762	0,01263
∞	∞	0	0	0	0

APPENDICE A3

Appendice A3

FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ
DI RISTAGNO PER GAS IDEALE

$$k = 1,67$$

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
0	∞	1,0000	1,0000	1,0000	∞
0,05	11,265	0,9979	0,9988	0,9992	11,242
0,10	5,661	0,9917	0,9950	0,9967	5,614
0,15	3,805	0,9815	0,9888	0,9925	3,735
0,20	2,887	0,9674	0,9803	0,9868	2,793
0,25	2,344	0,9497	0,9695	0,9795	2,226
0,30	1,989	0,9286	0,9566	0,9708	1,847
0,35	1,741	0,9046	0,9417	0,9606	1,575
0,40	1,560	0,8780	0,9250	0,9491	1,370
0,45	1,424	0,8491	0,9067	0,9364	1,209
0,50	1,320	0,8184	0,8869	0,9227	1,0803
0,55	1,239	0,7862	0,8658	0,9080	0,9742
0,60	1,176	0,7529	0,8437	0,8924	0,8853
0,65	1,126	0,7190	0,8207	0,8760	0,8097
0,70	1,0874	0,6847	0,7970	0,8590	0,7445
0,75	1,0576	0,6503	0,7728	0,8414	0,6877
0,80	1,0351	0,6162	0,7483	0,8234	0,6378
0,85	1,0189	0,5826	0,7236	0,8051	0,5936
0,90	1,0080	0,5497	0,6988	0,7866	0,5541
0,95	1,0019	0,5177	0,6742	0,7679	0,5187
1,00	1,0000	0,4867	0,6497	0,7491	0,4867
1,05	1,0018	0,4568	0,6255	0,7303	0,4576
1,10	1,0071	0,4282	0,6017	0,7116	0,4312
1,15	1,0154	0,4009	0,5784	0,6930	0,4070
1,20	1,0266	0,3749	0,5557	0,6746	0,3849
1,25	1,0406	0,3502	0,5335	0,6564	0,3646
1,30	1,0573	0,3269	0,5119	0,6385	0,3457

E DELLE PROPRIETÀ
IDEALE

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
1,35	1,0765	0,3049	0,4910	0,6209	0,3282
1,40	1,0981	0,2842	0,4707	0,6036	0,3121
1,45	1,122	0,2647	0,4511	0,5867	0,2972
1,50	1,148	0,2465	0,4323	0,5702	0,2830
1,55	1,176	0,2295	0,4142	0,5541	0,2700
1,60	1,207	0,2136	0,3968	0,5383	0,2579
1,65	1,240	0,1988	0,3801	0,5230	0,2465
1,70	1,275	0,1850	0,3640	0,5081	0,2358
1,75	1,312	0,1721	0,3486	0,4936	0,2257
1,80	1,351	0,1601	0,3339	0,4795	0,2163
1,85	1,392	0,1490	0,3198	0,4658	0,2075
1,90	1,436	0,1386	0,3063	0,4526	0,1991
1,95	1,482	0,1290	0,2934	0,4398	0,1912
2,00	1,530	0,1201	0,2811	0,4274	0,1838
2,05	1,580	0,1119	0,2694	0,4153	0,1768
2,10	1,632	0,1042	0,2582	0,4036	0,1701
2,15	1,687	0,09712	0,2475	0,3923	0,1638
2,20	1,744	0,09053	0,2373	0,3814	0,1579
2,25	1,803	0,08442	0,2276	0,3709	0,1522
2,30	1,865	0,07875	0,2183	0,3607	0,1468
2,35	1,929	0,07349	0,2094	0,3508	0,1417
2,40	1,995	0,06862	0,2010	0,3413	0,1369
2,45	2,064	0,06410	0,1930	0,3321	0,1323
2,50	2,135	0,05990	0,1853	0,3232	0,1279
2,55	2,209	0,05601	0,1780	0,3146	0,1237
2,60	2,285	0,05239	0,1710	0,3063	0,1197
2,65	2,364	0,04903	0,1644	0,2983	0,1159
2,70	2,445	0,04591	0,1581	0,2905	0,1123
2,75	2,529	0,04301	0,1520	0,2830	0,1088
2,80	2,616	0,04032	0,1462	0,2757	0,1055
2,85	2,705	0,03781	0,1407	0,2687	0,1023
2,90	2,797	0,03547	0,1354	0,2620	0,09924

$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
1,0000	∞
0,9992	11,242
0,9967	5,614
0,9925	3,735
0,9868	2,793
0,9795	2,226
0,9708	1,847
0,9606	1,575
0,9491	1,370
0,9364	1,209
0,9227	1,0803
0,9080	0,9742
0,8924	0,8853
0,8760	0,8097
0,8590	0,7445
0,8414	0,6877
0,8234	0,6378
0,8051	0,5936
0,7866	0,5541
0,7679	0,5187
0,7491	0,4867
0,7303	0,4576
0,7116	0,4312
0,6930	0,4070
0,6746	0,3849
0,6564	0,3646
0,6385	0,3457

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
2,95	2,892	0,03330	0,1304	0,2554	0,09633
3,00	2,990	0,03128	0,12560	0,2491	0,09354
3,50	4,134	0,01720	0,08779	0,1959	0,07111
4,00	5,608	0,009939	0,06321	0,1572	0,05574
4,50	7,456	0,006007	0,04676	0,1285	0,04479
5,00	9,721	0,003778	0,03542	0,1067	0,03672
6,00	15,68	165(10) ⁻⁶	0,02160	0,07657	0,02594
7,00	23,85	807(10) ⁻⁶	0,01406	0,05742	0,01925
8,00	34,58	429(10) ⁻⁶	0,00963	0,04456	0,01484
9,00	48,24	244(10) ⁻⁶	0,00687	0,03554	0,01177
10,00	65,18	147(10) ⁻⁶	0,00507	0,02898	0,00958
∞	∞	0	0	0	0

Appendice B1

FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE

$$k = 1,3$$

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
1,00	1,0000	1,000	1,000	1,0000	1,0000
1,05	0,9530	1,116	1,088	1,0257	0,9998
1,10	0,9112	1,237	1,178	1,0507	0,9989
1,15	0,8739	1,364	1,269	1,0752	0,9966
1,20	0,8403	1,497	1,362	1,0995	0,9925
1,25	0,8100	1,636	1,456	1,124	0,9866
1,30	0,7825	1,780	1,551	1,148	0,9786
1,35	0,7575	1,930	1,646	1,172	0,9684
1,40	0,7346	2,085	1,742	1,197	0,9562
1,45	0,7136	2,246	1,838	1,222	0,9421
1,50	0,6942	2,413	1,935	1,247	0,9261
1,55	0,6764	2,585	2,031	1,273	0,9084
1,60	0,6599	2,763	2,127	1,299	0,8891
1,65	0,6446	2,947	2,223	1,326	0,8684
1,70	0,6304	3,137	2,318	1,353	0,8466
1,75	0,6172	3,332	2,413	1,380	0,8238
1,80	0,6048	3,532	2,507	1,408	0,8001
1,85	0,5933	3,738	2,601	1,437	0,7758
1,90	0,5825	3,950	2,694	1,467	0,7510
1,95	0,5724	4,168	2,785	1,497	0,7259
2,00	0,5629	4,391	2,875	1,527	0,7006
2,05	0,5539	4,620	2,964	1,558	0,6752
2,10	0,5455	4,855	3,052	1,590	0,6499
2,15	0,5376	5,095	3,139	1,623	0,6248
2,20	0,5301	5,341	3,225	1,656	0,6000
2,25	0,5230	5,592	3,309	1,690	0,5755
2,30	0,5163	5,849	3,392	1,725	0,5515
2,35	0,5100	6,112	3,474	1,760	0,5280

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
2,40	0,5040	6,381	3,554	1,796	0,5050
2,45	0,4983	6,655	3,633	1,832	0,4827
2,50	0,4929	6,935	3,710	1,869	0,4610
2,55	0,4878	7,220	3,786	1,907	0,4400
2,60	0,4829	7,511	3,860	1,946	0,4196
2,65	0,4782	7,808	3,933	1,985	0,3999
2,70	0,4738	8,110	4,005	2,025	0,3810
2,75	0,4696	8,418	4,075	2,066	0,3628
2,80	0,4655	8,732	4,144	2,108	0,3452
2,85	0,4616	9,052	4,211	2,150	0,3284
2,90	0,4579	9,377	4,277	2,193	0,3123
2,95	0,4544	9,708	4,341	2,236	0,2969
3,00	0,4511	10,04	4,404	2,280	0,28217
3,50	0,4241	13,72	4,964	2,763	0,16770
4,00	0,4058	17,96	5,412	3,318	0,09932
4,50	0,3927	22,76	5,768	3,946	0,05941
5,00	0,3832	28,13	6,053	4,648	0,03612
6,00	0,3704	40,57	6,469	6,271	1422(10) ⁻⁴
7,00	0,3625	55,26	6,749	8,189	610(10) ⁻⁴
8,00	0,3573	72,22	6,943	10,401	283(10) ⁻⁴
9,00	0,3536	91,43	7,084	12,908	140(10) ⁻⁴
10,00	0,3510	112,91	7,188	15,710	740(10) ⁻⁴
∞	0,3397	∞	7,667	∞	0

Appendice B2
FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE

$k = 1,4$

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1,05	0,95312	1,1196	1,08398	1,03284	0,99987
1,10	0,91177	1,2450	1,1691	1,06494	0,99892
1,15	0,87502	1,3762	1,2550	1,09657	0,99669
1,20	0,84217	1,5133	1,3416	1,1280	0,99280
1,25	0,81264	1,6562	1,4286	1,1594	0,98706
1,30	0,78596	1,8050	1,5157	1,1909	0,97935
1,35	0,76175	1,9596	1,6028	1,2226	0,96972
1,40	0,73971	2,1200	1,6896	1,2547	0,95819
1,45	0,71956	2,2862	1,7761	1,2872	0,94483
1,50	0,70109	2,4583	1,8621	1,3202	0,92978
1,55	0,68410	2,6363	1,9473	1,3538	0,91319
1,60	0,66844	2,8201	2,0317	1,3880	0,89520
1,65	0,65396	3,0096	2,1152	1,4228	0,87598
1,70	0,64055	3,2050	2,1977	1,4583	0,85573
1,75	0,62809	3,4062	2,2791	1,4946	0,83456
1,80	0,61650	3,6133	2,3592	1,5316	0,81268
1,85	0,60570	3,8262	2,4381	1,5694	0,79021
1,90	0,59562	4,0450	2,5157	1,6079	0,76735
1,95	0,58618	4,2696	2,5919	1,6473	0,74418
2,00	0,57735	4,5000	2,6666	1,6875	0,72088
2,05	0,56907	4,7363	2,7400	1,7286	0,69752
2,10	0,56128	4,9784	2,8119	1,7704	0,67422
2,15	0,55395	5,2262	2,8823	1,8132	0,65105
2,20	0,54706	5,4800	2,9512	1,8569	0,62812
2,25	0,54055	5,7396	3,0186	1,9014	0,60554
2,30	0,53441	6,0050	3,0846	1,9468	0,58331
2,35	0,52861	6,2762	3,1490	1,9931	0,56148

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
2,40	0,52312	6,5533	3,2119	2,0403	0,54015
2,45	0,51792	6,8362	3,2733	2,0885	0,51932
2,50	0,51299	7,1250	3,3333	2,1375	0,49902
2,55	0,50831	7,4196	3,3918	2,1875	0,47927
2,60	0,50387	7,7200	3,4489	2,2383	0,46012
2,65	0,49965	8,0262	3,5047	2,2901	0,44155
2,70	0,49563	8,3383	3,5590	2,3429	0,42359
2,75	0,49181	8,6562	3,6119	2,3966	0,40622
2,80	0,48817	8,9800	3,6635	2,4512	0,38946
2,85	0,48470	9,3096	3,7139	2,5067	0,37330
2,90	0,48138	9,6450	3,7629	2,5632	0,35773
2,95	0,47821	9,986	3,8106	2,6206	0,34275
3,00	0,47519	10,333	3,8571	2,6790	0,32834
3,50	0,45115	14,125	4,2608	3,3150	0,21295
4,00	0,43496	18,500	4,5714	4,0469	0,13876
4,50	0,42355	23,458	4,8119	4,8751	0,09170
5,00	0,41523	29,000	5,0000	5,8000	0,06172
6,00	0,40416	41,833	5,2683	7,941	0,02965
7,00	0,39736	57,000	5,4444	10,469	0,01535
8,00	0,39289	74,500	5,5652	13,387	0,00849
9,00	0,38980	94,333	5,6512	16,693	0,00496
10,00	0,38757	116,50	5,7143	20,388	0,00304
∞	0,37796	∞	6,000	∞	0

Appendice B3

FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE

$$k = 1,67$$

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
1,00	1,0000	1,000	1,000	1,0000	1,0000
1,05	0,9535	1,128	1,075	1,0496	0,9998
1,10	0,9131	1,262	1,149	1,0985	0,9990
1,15	0,8776	1,403	1,223	1,1471	0,9969
1,20	0,8463	1,550	1,297	1,195	0,9934
1,25	0,8184	1,703	1,370	1,244	0,9883
1,30	0,7935	1,863	1,441	1,293	0,9813
1,35	0,7711	2,029	1,511	1,343	0,9728
1,40	0,7509	2,201	1,580	1,394	0,9627
1,45	0,7325	2,379	1,647	1,445	0,9511
1,50	0,7158	2,563	1,713	1,497	0,9381
1,55	0,7006	2,754	1,777	1,550	0,9239
1,60	0,6866	2,951	1,840	1,604	0,9086
1,65	0,6738	3,154	1,901	1,659	0,8924
1,70	0,6620	3,364	1,960	1,716	0,8754
1,75	0,6511	3,580	2,018	1,774	0,8577
1,80	0,6410	3,802	2,074	1,833	0,8395
1,85	0,6316	4,030	2,128	1,893	0,8209
1,90	0,6229	4,265	2,181	1,955	0,8019
1,95	0,6148	4,506	2,232	2,018	0,7827
2,00	0,6073	4,753	2,282	2,083	0,7634
2,05	0,6002	5,006	2,330	2,149	0,7441
2,10	0,5936	5,266	2,376	2,216	0,7248
2,15	0,5875	5,532	2,421	2,284	0,7056
2,20	0,5817	5,804	2,465	2,354	0,6866
2,25	0,5762	6,082	2,507	2,426	0,6678
2,30	0,5711	6,366	2,548	2,499	0,6493
2,35	0,5663	6,657	2,587	2,574	0,6310

M_1	M_2	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
2,40	0,5617	6,954	2,625	2,650	0,6130
2,45	0,5574	7,257	2,662	2,727	0,5954
2,50	0,5534	7,567	2,697	2,806	0,5783
2,55	0,5495	7,883	2,731	2,886	0,5615
2,60	0,5459	8,205	2,764	2,968	0,5450
2,65	0,5425	8,533	2,796	3,052	0,5289
2,70	0,5392	8,868	2,827	3,137	0,5133
2,75	0,5361	9,209	2,857	3,223	0,4981
2,80	0,5331	9,556	2,886	3,311	0,4833
2,85	0,5303	9,909	2,914	3,401	0,4689
2,90	0,5276	10,269	2,941	3,492	0,4550
2,95	0,5251	10,635	2,967	3,584	0,4415
3,00	0,5227	11,01	2,992	3,678	0,4283
3,50	0,5036	15,07	3,204	4,704	0,3177
4,00	0,4910	19,76	3,358	5,885	0,2384
4,50	0,4822	25,08	3,473	7,221	0,1816
5,00	0,4758	31,02	3,560	8,714	0,1406
6,00	0,4674	44,78	3,680	12,17	0,0883
7,00	0,4623	61,04	3,756	16,25	0,0584
8,00	0,4589	79,81	3,808	20,96	0,0405
9,00	0,4566	101,08	3,843	26,30	0,0292
10,00	0,4550	124,84	3,870	32,26	0,0216
∞	0,4479	∞	3,985	∞	0

Appendice C1

FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE

$$k = 1,3$$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{max}}{d}$
0	1,150	∞	∞	0	∞
0,05	1,149	21,444	11,721	0,05361	301,74
0,10	1,148	10,716	5,885	0,1072	72,20
0,15	1,146	7,137	3,952	0,1606	30,18
0,20	1,143	5,346	2,994	0,2138	15,73
0,25	1,139	4,270	2,426	0,2668	9,201
0,30	1,134	3,551	2,054	0,3195	5,759
0,35	1,129	3,036	1,793	0,3719	3,760
0,40	1,123	2,649	1,602	0,4239	2,520
0,45	1,116	2,348	1,459	0,4754	1,714
0,50	1,1084	2,106	1,348	0,5264	1,172
0,55	1,1001	1,907	1,261	0,5769	0,8004
0,60	1,0911	1,741	1,193	0,6267	0,5409
0,65	1,0815	1,600	1,140	0,6759	0,3586
0,70	1,0713	1,479	1,0972	0,7245	0,2305
0,75	1,0605	1,373	1,0644	0,7724	0,14131
0,80	1,0493	1,280	1,0395	0,8195	0,08044
0,85	1,0376	1,198	1,0214	0,8658	0,04053
0,90	1,0254	1,125	1,0092	0,9113	0,01623
0,95	1,0129	1,0594	1,0022	0,9561	0,00367
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
1,05	0,9868	0,9461	1,0021	1,0430	0,00305
1,10	0,9733	0,8969	1,0083	1,0852	0,01122
1,15	0,9596	0,8518	1,0183	1,1266	0,02324
1,20	0,9457	0,8104	1,0321	1,1670	0,03820
1,25	0,9316	0,7722	1,0495	1,206	0,05524
1,30	0,9174	0,7368	1,0704	1,245	0,07388
1,35	0,9031	0,7039	1,0948	1,283	0,09365

$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$
2,650	0,6130
2,727	0,5954
2,806	0,5783
2,886	0,5615
2,968	0,5450
3,052	0,5289
3,137	0,5133
3,223	0,4981
3,311	0,4833
3,401	0,4689
3,492	0,4550
3,584	0,4415
3,678	0,4283
4,704	0,3177
5,885	0,2384
7,221	0,1816
8,714	0,1406
12,17	0,08831
16,25	0,05842
20,96	0,04059
26,30	0,02920
32,26	0,02167
∞	0

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{max}}{d}$
1,40	0,8887	0,6734	1,1227	1,320	0,11417
1,45	0,8743	0,6448	1,1543	1,356	0,13513
1,50	0,8598	0,6182	1,189	1,391	0,1564
1,55	0,8454	0,5932	1,228	1,425	0,1777
1,60	0,8309	0,5697	1,271	1,458	0,1989
1,65	0,8165	0,5477	1,318	1,491	0,2200
1,70	0,8022	0,5269	1,369	1,523	0,2408
1,75	0,7880	0,5073	1,424	1,554	0,2613
1,80	0,7739	0,4887	1,484	1,584	0,2814
1,85	0,7599	0,4712	1,549	1,613	0,3010
1,90	0,7460	0,4546	1,618	1,641	0,3202
1,95	0,7323	0,4388	1,693	1,669	0,3390
2,00	0,7188	0,4239	1,773	1,696	0,3573
2,05	0,7054	0,4097	1,859	1,722	0,3751
2,10	0,6922	0,3962	1,951	1,747	0,3924
2,15	0,6791	0,3833	2,050	1,772	0,4092
2,20	0,6662	0,3710	2,156	1,796	0,4255
2,25	0,6536	0,3593	2,268	1,819	0,4413
2,30	0,6412	0,3482	2,388	1,842	0,4566
2,35	0,6290	0,3375	2,517	1,864	0,4715
2,40	0,6170	0,3273	2,654	1,885	0,4860
2,45	0,6051	0,3175	2,800	1,906	0,5000
2,50	0,5935	0,3082	2,954	1,926	0,5136
2,55	0,5822	0,2992	3,119	1,946	0,5267
2,60	0,5711	0,2906	3,295	1,965	0,5394
2,65	0,5601	0,2824	3,482	1,983	0,5517
2,70	0,5493	0,2745	3,681	2,001	0,5636
2,75	0,5388	0,2669	3,892	2,019	0,5752
2,80	0,5285	0,2596	4,116	2,036	0,5864
2,85	0,5184	0,2526	4,354	2,052	0,5972
2,90	0,5085	0,2459	4,607	2,068	0,6077
2,95	0,4988	0,2394	4,875	2,084	0,6179

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
3,00	0,4894	0,2332	5,160	2,099	0,6277
3,50	0,4053	0,1819	9,110	2,228	0,7110
4,00	0,3382	0,1454	15,94	2,326	0,7726
4,50	0,2848	0,1186	27,39	2,402	0,8189
5,00	0,2421	0,09841	45,95	2,460	0,8543
6,00	0,1797	0,07065	120,1	2,543	0,9037
7,00	0,1377	0,05302	285,3	2,598	0,9355
8,00	0,1085	0,04117	625,2	2,635	0,9570
9,00	0,08745	0,03286	1275	2,662	0,9722
10,00	0,07188	0,02769	2438	2,681	0,9832
∞	0	0	∞	2,769	1,0326

Appendice C2

FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE

$$k = 1,4$$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
0	1,2000	∞	∞	0	∞
0,05	1,1994	21,903	11,5914	0,05476	280,02
0,10	1,1976	10,9435	5,8218	0,10943	66,922
0,15	1,1946	7,2866	3,9103	0,16395	27,932
0,20	1,1905	5,4555	2,9635	0,21822	14,533
0,25	1,1852	4,3546	2,4027	0,27217	8,4834
0,30	1,1788	3,6190	2,0351	0,32572	5,2992
0,35	1,1713	3,0922	1,7780	0,37880	3,4525
0,40	1,1628	2,6958	1,5901	0,43133	2,3085
0,45	1,1533	2,3865	1,4486	0,48326	1,5664
0,50	1,1429	2,1381	1,3399	0,53453	1,06908
0,55	1,1315	1,9341	1,2549	0,58506	0,72805
0,60	1,1194	1,7634	1,1882	0,63481	0,49081
0,65	1,10650	1,6183	1,1356	0,68374	0,32460
0,70	1,09290	1,4934	1,09436	0,73179	0,20814
0,75	1,07865	1,3848	1,06242	0,77893	0,12728
0,80	1,06383	1,2892	1,03823	0,82514	0,07229
0,85	1,04849	1,2047	1,02067	0,87037	0,03632
0,90	1,03270	1,12913	1,00887	0,91459	0,014513
0,95	1,01652	1,06129	1,00215	0,95782	0,003280
1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0
1,05	0,98320	0,94435	1,00203	1,04115	0,002712
1,10	0,96618	0,89359	1,00793	1,08124	0,009933
1,15	0,94899	0,84710	1,01746	1,1203	0,02053
1,20	0,93168	0,80436	1,03044	1,1583	0,03364
1,25	0,91429	0,76495	1,04676	1,1952	0,04858
1,30	0,89686	0,72848	1,06630	1,2311	0,06483
1,35	0,87944	0,69466	1,08904	1,2660	0,08199
1,40	0,86207	0,66320	1,1149	1,2999	0,09974

$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
0	∞
0,05476	280,02
0,10943	66,922
0,16395	27,932
0,21822	14,533
0,27217	8,4834
0,32572	5,2992
0,37880	3,4525
0,43133	2,3085
0,48326	1,5664
0,53453	1,06908
0,58506	0,72805
0,63481	0,49081
0,68374	0,32460
0,73179	0,20814
0,77893	0,12728
0,82514	0,07229
0,87037	0,03632
0,91459	0,014513
0,95782	0,003280
1,00000	0
1,04115	0,002712
1,08124	0,009933
1,1203	0,02053
1,1583	0,03364
1,1952	0,04858
1,2311	0,06483
1,2660	0,08199
1,2999	0,09974

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
1,45	0,84477	0,63387	1,1440	1,3327	0,11782
1,50	0,82759	0,60648	1,1762	1,3646	0,13605
1,55	0,81054	0,58084	1,2116	1,3955	0,15427
1,60	0,79365	0,55679	1,2502	1,4254	0,17236
1,65	0,77695	0,53421	1,2922	1,4544	0,19022
1,70	0,76046	0,51297	1,3376	1,4825	0,20780
1,75	0,74419	0,49295	1,3865	1,5097	0,22504
1,80	0,72816	0,47407	1,4390	1,5360	0,24189
1,85	0,71238	0,45623	1,4952	1,5614	0,25832
1,90	0,69686	0,43936	1,5552	1,5861	0,27433
1,95	0,68162	0,42339	1,6193	1,6099	0,28989
2,00	0,66667	0,40825	1,6875	1,6330	0,30499
2,05	0,65200	0,39389	1,7600	1,6553	0,31965
2,10	0,63762	0,38024	1,8369	1,6769	0,33385
2,15	0,62354	0,36728	1,9185	1,6977	0,34760
2,20	0,60976	0,35494	2,0050	1,7179	0,36091
2,25	0,59627	0,34319	2,0964	1,7374	0,37378
2,30	0,58309	0,33200	2,1931	1,7563	0,38623
2,35	0,57021	0,32133	2,2953	1,7745	0,39826
2,40	0,55762	0,31114	2,4031	1,7922	0,40989
2,45	0,54533	0,30141	2,5168	1,8092	0,42113
2,50	0,53333	0,29212	2,6367	1,8257	0,43197
2,55	0,52163	0,28323	2,7630	1,8417	0,44247
2,60	0,51020	0,27473	2,8960	1,8571	0,45259
2,65	0,49906	0,26658	3,0359	1,8721	0,46237
2,70	0,48820	0,25878	3,1830	1,8865	0,47182
2,75	0,47761	0,25131	3,3376	1,9005	0,48095
2,80	0,46729	0,24414	3,5001	1,9140	0,48976
2,85	0,45723	0,23726	3,6707	1,9271	0,49828
2,90	0,44743	0,23066	3,8498	1,9398	0,50651
2,95	0,43788	0,22431	4,0376	1,9521	0,51447
3,00	0,42857	0,21822	4,2346	1,9640	0,52216

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
3,50	0,34783	0,16850	6,7896	2,0642	0,58643
4,00	0,28571	0,13363	10,719	2,1381	0,63306
4,50	0,23762	0,10833	16,562	2,1936	0,66764
5,00	0,20000	0,08944	25,000	2,2361	0,69381
6,00	0,14634	0,06376	53,180	2,2953	0,72987
7,00	0,11111	0,04762	104,14	2,3333	0,75281
8,00	0,08696	0,03686	190,11	2,3591	0,76820
9,00	0,06977	0,02935	327,19	2,3772	0,77898
10,00	0,05714	0,02390	535,94	2,3905	0,78683
∞	0	0	∞	2,4495	0,82153

Appendice C3

FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE

$$k = 1,67$$

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
0	1,335	∞	∞	0	∞
0,05	1,334	23,099	11,265	0,05775	234,36
0,10	1,331	11,535	5,661	0,1154	55,83
0,15	1,325	7,674	3,805	0,1727	23,21
0,20	1,317	5,739	2,887	0,2296	12,11
0,25	1,308	4,574	2,344	0,2859	6,980
0,30	1,296	3,795	1,989	0,3415	4,337
0,35	1,282	3,235	1,741	0,3963	2,810
0,40	1,267	2,814	1,560	0,4502	1,868
0,45	1,250	2,485	1,424	0,5031	1,260
0,50	1,232	2,220	1,320	0,5549	0,8549
0,55	1,212	2,002	1,239	0,6056	0,5787
0,60	1,191	1,819	1,176	0,6548	0,3877
0,65	1,169	1,664	1,126	0,7029	0,2548
0,70	1,146	1,530	1,0874	0,7496	0,1625
0,75	1,1233	1,413	1,0576	0,7949	0,09870
0,80	1,0993	1,311	1,0351	0,8388	0,05576
0,85	1,0748	1,220	1,0189	0,8812	0,02780
0,90	1,0501	1,139	1,0081	0,9222	0,01106
0,95	1,0251	1,0657	1,0019	0,9618	0,00248
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
1,05	0,7949	0,9404	1,0018	1,0368	0,00203
1,10	0,9499	0,8860	1,0070	1,0721	0,00740
1,15	0,9251	0,8364	1,0154	1,1061	0,01522
1,20	0,9006	0,7908	1,0266	1,1388	0,02481
1,25	0,8763	0,7489	1,0406	1,170	0,03564
1,30	0,8524	0,7102	1,0573	1,200	0,04733
1,35	0,8289	0,6744	1,0765	1,229	0,05957

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
1,40	0,8059	0,6412	1,0981	1,257	0,07212
1,45	0,7833	0,6104	1,1220	1,284	0,08481
1,50	0,7612	0,5817	1,148	1,309	0,09749
1,55	0,7397	0,5549	1,176	1,333	0,1101
1,60	0,7187	0,5298	1,207	1,356	0,1225
1,65	0,6982	0,5064	1,240	1,378	0,1346
1,70	0,6783	0,4845	1,275	1,400	0,1465
1,75	0,6590	0,4639	1,312	1,421	0,1580
1,80	0,6402	0,4445	1,351	1,440	0,1692
1,85	0,6219	0,4263	1,392	1,459	0,1800
1,90	0,6042	0,4091	1,436	1,477	0,1905
1,95	0,5871	0,3929	1,482	1,494	0,2007
2,00	0,5705	0,3776	1,530	1,510	0,2105
2,05	0,5544	0,3632	1,580	1,526	0,2199
2,10	0,5388	0,3496	1,632	1,541	0,2290
2,15	0,5238	0,3367	1,687	1,556	0,2377
2,20	0,5093	0,3244	1,744	1,570	0,2461
2,25	0,4952	0,3128	1,803	1,583	0,2542
2,30	0,4816	0,3017	1,865	1,596	0,2620
2,35	0,4684	0,2912	1,929	1,608	0,2694
2,40	0,4557	0,2813	1,995	1,620	0,2766
2,45	0,4434	0,2718	2,064	1,631	0,2835
2,50	0,4315	0,2628	2,135	1,642	0,2901
2,55	0,4200	0,2542	2,209	1,653	0,2965
2,60	0,4089	0,2460	2,285	1,663	0,3026
2,65	0,3982	0,2381	2,364	1,672	0,3085
2,70	0,3878	0,2306	2,445	1,682	0,3141
2,75	0,3778	0,2235	2,529	1,691	0,3196
2,80	0,3681	0,2167	2,616	1,699	0,3248
2,85	0,3587	0,2102	2,705	1,707	0,3299
2,90	0,3497	0,2039	2,797	1,715	0,3348
2,95	0,3410	0,1979	2,892	1,723	0,3395

$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$	M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$	$\frac{f \cdot l_{\max}}{d}$
1,257	0,07212	3,00	0,3325	0,1922	2,990	1,730	0,3440
1,284	0,08481	3,50	0,2616	0,1461	4,134	1,790	0,3810
1,309	0,09749	4,00	0,2099	0,1145	5,608	1,833	0,4071
1,333	0,1101	4,50	0,1715	0,09203	7,456	1,864	0,4261
1,356	0,1225	5,00	0,1424	0,07547	9,721	1,887	0,4402
1,378	0,1346	6,00	0,10222	0,05329	15,68	1,918	0,4594
1,400	0,1465	7,00	0,07666	0,03955	23,85	1,938	0,4714
1,421	0,1580	8,00	0,05949	0,03049	34,58	1,951	0,4793
1,440	0,1692	9,00	0,04745	0,02420	48,24	1,960	0,4849
1,459	0,1800	10,00	0,03870	0,01996	65,18	1,967	0,4889
1,477	0,1905	∞	0	0	∞	1,996	0,5064
1,494	0,2007						
1,510	0,2105						
1,526	0,2199						
1,541	0,2290						
1,556	0,2377						
1,570	0,2461						
1,583	0,2542						
1,596	0,2620						
1,608	0,2694						
1,620	0,2766						
1,631	0,2835						
1,642	0,2901						
1,653	0,2965						
1,663	0,3026						
1,672	0,3085						
1,682	0,3141						
1,691	0,3196						
1,699	0,3248						
1,707	0,3299						
1,715	0,3348						
1,723	0,3395						

Appendice D

FUNZIONE $f \cdot l_{\max}/d$ DEL MOTO ISOTERMO PER GAS IDEALE

M	$f \cdot l_{\max}/d$		
	$(k = 1,3)$	$(k = 1,4)$	$(k = 1,67)$
0	∞	∞	∞
0,01	7682,36	7132,98	5978,33
0,02	1914,52	1777,23	1488,69
0,03	846,950	785,974	657,836
0,04	473,594	439,327	367,327
0,05	300,963	279,059	233,042
0,06	207,311	192,122	160,220
0,07	150,930	139,791	116,399
0,08	114,403	105,892	88,0242
0,09	89,4132	82,7040	68,6231
0,10	71,5803	66,1599	54,7879
0,11	58,4206	53,9538	44,5861
0,12	48,4406	44,6991	36,8558
0,13	40,6985	37,5214	30,8645
0,14	34,5766	31,8474	26,1317
0,15	29,6562	27,2883	22,3320
0,16	25,6453	23,5731	19,2384
0,17	22,3354	20,5083	16,6887
0,18	19,5745	17,9527	14,5648
0,19	17,2492	15,8013	12,7787
0,20	15,2743	13,9747	11,2640
0,21	13,5839	12,4121	9,96982
0,22	12,1273	11,0662	8,85653
0,23	10,8642	9,89969	7,89299
0,24	9,76284	8,88304	7,05447
0,25	8,79748	7,99246	6,32108
0,26	7,94788	7,20869	5,67670
0,27	7,19557	6,51597	5,10819
0,28	6,52806	5,90133	4,60468
0,29	5,93324	5,35402	4,15720

M	$f-l_{\max}/d$		
	(k = 1,3)	(k = 1,4)	(k = 1,67)
0,30	5,40143	4,86504	3,75824
0,31	4,92449	4,42684	3,40150
0,32	4,49552	4,03305	3,08164
0,33	4,10869	3,67825	2,79415
0,34	3,75900	3,35780	2,53516
0,35	3,44216	3,06774	2,30136
0,36	3,15449	2,80464	2,08991
0,37	2,89279	2,56554	1,89834
0,38	2,65428	2,34789	1,72449
0,39	2,43655	2,14942	1,56651
0,40	2,23748	1,96818	1,42276
0,41	2,05520	1,80245	1,29181
0,42	1,88808	1,65071	1,17240
0,43	1,73468	1,51163	1,06341
0,44	1,59371	1,38401	0,963852
0,45	1,46402	1,26680	0,872859
0,46	1,34462	1,15906	0,789647
0,47	1,23458	1,05995	0,713520
0,48	1,13310	0,968735	0,643856
0,49	1,03946	0,884726	0,580096
0,50	0,952996	0,807323	0,521740
0,51	0,873119	0,735981	0,468336
0,52	0,799302	0,670210	0,419478
0,53	0,731061	0,609564	0,374796
0,54	0,667959	0,553641	0,333959
0,55	0,609603	0,502074	0,296663
0,56	0,555633	0,454533	0,262634
0,57	0,505720	0,410714	0,231622
0,58	0,459567	0,370342	0,203401
0,59	0,416898	0,333164	0,177761
0,60	0,377466	0,298949	0,154513
0,61	0,341042	0,267487	0,133483

M	$f-l_{\max}/d$		
	(k = 1,3)	(k = 1,4)	(k = 1,67)
0,62	0,307414	0,238585	0,114511
0,63	0,276392	0,212064	9,74516 10 ⁻²
0,64	0,247796	0,187760	8,21698 10 ⁻²
0,65	0,221464	0,165524	6,85421 10 ⁻²
0,66	0,197245	0,145216	5,64542 10 ⁻²
0,67	0,175000	0,126709	4,58015 10 ⁻²
0,68	0,154601	0,109883	3,64869 10 ⁻²
0,69	0,135929	9,46304 10 ⁻²	2,84205 10 ⁻²
0,70	0,118874	8,08487 10 ⁻²	2,15196 10 ⁻²
0,71	0,103333	6,84445 10 ⁻²	1,57075 10 ⁻²
0,72	8,92124 10 ⁻²	5,73304 10 ⁻²	1,09128 10 ⁻²
0,73	7,64238 10 ⁻²	4,74258 10 ⁻²	7,06965 10 ⁻³
0,74	6,48856 10 ⁻²	3,86555 10 ⁻²	4,11673 10 ⁻³
0,75	5,45219 10 ⁻²	3,09496 10 ⁻²	1,99705 10 ⁻³
0,76	4,52616 10 ⁻²	2,42430 10 ⁻²	6,57633 10 ⁻⁴
0,77	3,70390 10 ⁻²	1,84751 10 ⁻²	4,91571 10 ⁻⁴
0,78	2,97922 10 ⁻²	1,35893 10 ⁻²	1,25654 10 ⁻⁴
0,79	2,34639 10 ⁻²	9,53293 10 ⁻³	8,44815 10 ⁻⁴
0,80	1,80005 10 ⁻²	6,25664 10 ⁻³	2,16509 10 ⁻³
0,81	1,33515 10 ⁻²	3,71446 10 ⁻³	4,05081 10 ⁻³
0,82	9,47013 10 ⁻³	1,86317 10 ⁻³	6,46642 10 ⁻³
0,83	6,31247 10 ⁻³	6,62699 10 ⁻⁴	9,37945 10 ⁻³
0,84	3,83721 10 ⁻³	7,51428 10 ⁻⁵	1,27594 10 ⁻²
0,85	2,00568 10 ⁻³	6,50696 10 ⁻⁵	1,65777 10 ⁻²
0,86	7,81745 10 ⁻⁴	5,99273 10 ⁻⁴	2,08076 10 ⁻²
0,87	1,31261 10 ⁻⁴	1,64691 10 ⁻³	2,54240 10 ⁻²
0,88	2,22567 10 ⁻⁵	3,17843 10 ⁻³	3,04034 10 ⁻²
0,89	4,24765 10 ⁻⁴	5,16646 10 ⁻³	3,57237 10 ⁻²
0,90	1,31068 10 ⁻³	7,58514 10 ⁻³	4,13644 10 ⁻²
0,91	2,65318 10 ⁻³	1,04103 10 ⁻²	4,73059 10 ⁻²
0,92	4,42734 10 ⁻³	1,36191 10 ⁻²	5,35297 10 ⁻²
0,93	6,60957 10 ⁻³	1,71898 10 ⁻²	6,00190 10 ⁻²

$(k = 1,67)$	M	$f \cdot l_{\max} / d$		
		$(k = 1,3)$	$(k = 1,4)$	$(k = 1,67)$
0,114511	0,94	9,17765 10^{-3}	2,11024 10^{-2}	6,67573 10^{-2}
9,74516 10^{-2}	0,95	1,21106 10^{-2}	2,53375 10^{-2}	7,37295 10^{-2}
8,21698 10^{-2}	0,96	1,53888 10^{-2}	2,98775 10^{-2}	8,09213 10^{-2}
6,85421 10^{-2}	0,97	1,89933 10^{-2}	3,47050 10^{-2}	8,83191 10^{-2}
5,64542 10^{-2}	0,98	2,29068 10^{-2}	3,98042 10^{-2}	9,59104 10^{-2}
4,58015 10^{-2}	0,99	2,71125 10^{-2}	4,51597 10^{-2}	0,103683
3,64869 10^{-2}	1,00	3,15949 10^{-2}	5,07579 10^{-2}	0,111626
2,84205 10^{-2}	1,05	5,76595 10^{-2}	8,19307 10^{-2}	0,153535
2,15196 10^{-2}	1,10	8,87124 10^{-2}	0,117411	0,198322
1,57075 10^{-2}	1,15	0,123537	0,156099	0,245128
1,09128 10^{-2}	1,20	0,161195	0,197147	0,293302
7,06965 10^{-3}	1,25	0,200959	0,239902	0,342344
4,11673 10^{-3}	1,30	0,242259	0,283855	0,391873
1,99705 10^{-3}	1,35	0,284648	0,328608	0,441593
6,57633 10^{-4}	1,40	0,327773	0,373848	0,491279
4,91571 10^{-5}	1,45	0,371356	0,419330	0,540755
1,25654 10^{-4}	1,50	0,415174	0,464862	0,589888
8,44315 10^{-4}	1,55	0,459053	0,510291	0,638574
2,16509 10^{-3}	1,60	0,502852	0,555497	0,686737
4,05081 10^{-3}	1,65	0,546460	0,600386	0,734319
6,46642 10^{-3}	1,70	0,589790	0,644886	0,781277
9,37945 10^{-3}	1,75	0,632773	0,688939	0,827582
1,27594 10^{-2}	1,80	0,675354	0,732503	0,873212
1,65777 10^{-2}	1,85	0,717492	0,775546	0,918155
2,08076 10^{-2}	1,90	0,759155	0,818042	0,962404
2,54240 10^{-2}	1,95	0,800318	0,859976	1,00596
3,04034 10^{-2}	2,00	0,840965	0,901337	1,04882
3,57237 10^{-2}	2,05	0,881084	0,942118	1,09099
4,13644 10^{-2}	2,10	0,920667	0,982316	1,13248
4,73059 10^{-2}	2,15	0,959710	1,02193	1,17330
5,35297 10^{-2}	2,20	0,998211	1,06097	1,21346
6,00190 10^{-2}	2,25	1,03617	1,09943	1,25297

M	$f \cdot l_{\max} / d$		
	$(k = 1,3)$	$(k = 1,4)$	$(k = 1,67)$
2,30	1,07359	1,13732	1,29184
2,35	1,11049	1,17464	1,33008
2,40	1,14685	1,21142	1,36772
2,45	1,18269	1,24765	1,40476
2,50	1,21802	1,28334	1,44121
2,55	1,25285	1,31851	1,47710
2,60	1,28718	1,35316	1,51243
2,65	1,32102	1,38731	1,54721
2,70	1,35439	1,42096	1,58147
2,75	1,38728	1,45413	1,61521
2,80	1,41972	1,48682	1,64844
2,85	1,45171	1,51905	1,68118
2,90	1,48325	1,55083	1,71345
2,95	1,51437	1,58216	1,74524
3,00	1,54506	1,61306	1,77658
3,50	1,83068	1,90031	2,06723
4,00	2,08303	2,15370	2,32284
4,50	2,30851	2,37990	2,55055
5,00	2,51201	2,58392	2,75565

Appendice E1

FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE

$k = 1,3$

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
0	0	0	2,300	1,255	0
0,05	0,01143	0,01314	2,293	1,253	0,00573
0,10	0,04489	0,05155	2,270	1,247	0,02270
0,15	0,09803	0,11236	2,234	1,237	0,05028
0,20	0,16726	0,19120	2,186	1,224	0,08745
0,25	0,2482	0,2828	2,127	1,209	0,1329
0,30	0,3363	0,3816	2,059	1,191	0,1853
0,35	0,4270	0,4822	1,984	1,172	0,2430
0,40	0,5165	0,5800	1,904	1,152	0,3046
0,45	0,6015	0,6713	1,821	1,131	0,3687
0,50	0,6796	0,7533	1,736	1,112	0,4340
0,55	0,7494	0,8244	1,651	1,0919	0,4994
0,60	0,8099	0,8837	1,567	1,0739	0,5640
0,65	0,8611	0,9312	1,485	1,0574	0,6272
0,70	0,9029	0,9673	1,405	1,0426	0,6885
0,75	0,9361	0,9928	1,328	1,0299	0,7473
0,80	0,9614	1,0088	1,255	1,0193	0,8035
0,85	0,9795	1,0163	1,186	1,0109	0,8569
0,90	0,9914	1,0166	1,120	1,0049	0,9075
0,95	0,9980	1,0108	1,0583	1,0012	0,9552
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,05	0,9982	0,9851	0,9452	1,0012	1,0421
1,10	0,9933	0,9669	0,8939	1,0049	1,0816
1,15	0,9859	0,9461	0,8458	1,0111	1,1186
1,20	0,9765	0,9235	0,8008	1,0199	1,1532
1,25	0,9656	0,8996	0,7588	1,0312	1,186
1,30	0,9534	0,8747	0,7194	1,0451	1,216

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
1,35	0,9404	0,8493	0,6826	1,0617	1,244
1,40	0,9268	0,8237	0,6483	1,0809	1,270
1,45	0,9128	0,7980	0,6161	1,1028	1,295
1,50	0,8986	0,7726	0,5860	1,128	1,318
1,55	0,8843	0,7475	0,5578	1,155	1,340
1,60	0,8701	0,7230	0,5314	1,185	1,360
1,65	0,8560	0,6990	0,5067	1,219	1,379
1,70	0,8421	0,6756	0,4835	1,256	1,397
1,75	0,8285	0,6529	0,4617	1,296	1,414
1,80	0,8153	0,6309	0,4413	1,340	1,430
1,85	0,8024	0,6097	0,4221	1,387	1,445
1,90	0,7898	0,5892	0,4040	1,438	1,459
1,95	0,7776	0,5695	0,3870	1,493	1,472
2,00	0,7659	0,5505	0,3710	1,552	1,484
2,05	0,7545	0,5322	0,3559	1,615	1,495
2,10	0,7435	0,5146	0,3416	1,683	1,506
2,15	0,7329	0,4977	0,3281	1,755	1,517
2,20	0,7227	0,4815	0,3154	1,832	1,527
2,25	0,7129	0,4659	0,3034	1,915	1,536
2,30	0,7034	0,4510	0,2920	2,003	1,545
2,35	0,6943	0,4367	0,2812	2,097	1,553
2,40	0,6855	0,4229	0,2710	2,197	1,561
2,45	0,6771	0,4097	0,2613	2,303	1,568
2,50	0,6690	0,3971	0,2521	2,416	1,575
2,55	0,6612	0,3850	0,2433	2,536	1,582
2,60	0,6537	0,3733	0,2350	2,664	1,588
2,65	0,6465	0,3621	0,2271	2,800	1,594
2,70	0,6396	0,3513	0,2195	2,944	1,600
2,75	0,6329	0,3410	0,2123	3,096	1,606
2,80	0,6265	0,3311	0,2055	3,258	1,611
2,85	0,6203	0,3216	0,1990	3,429	1,616

22

M	$\frac{T_0}{T^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
2,90	0,6144	0,3124	0,1928	3,611	1,621
2,95	0,6087	0,3036	0,1868	3,804	1,626
3,00	0,6032	0,2952	0,1811	4,007	1,630
3,50	0,5582	0,2262	0,1359	6,806	1,665
4,00	0,5265	0,1781	0,1055	11,57	1,688
4,50	0,5037	0,1435	0,8417	19,44	1,704
5,00	0,4867	0,1178	0,06866	32,06	1,716
6,00	0,4639	0,08335	0,04812	76,97	1,732
7,00	0,4496	0,06192	0,03555	191,3	1,742
8,00	0,4402	0,04775	0,02732	413,4	1,748
9,00	0,4336	0,03792	0,02164	833,4	1,753
10,00	0,4289	0,03082	0,01756	1582	1,756
∞	0,4083	0	0	∞	1,769
6	1,0617	1,244			
8	1,0809	1,270			
1	1,1028	1,295			
0	1,128	1,318			
8	1,155	1,340			
4	1,185	1,360			
7	1,219	1,379			
5	1,256	1,397			
7	1,296	1,414			
8	1,340	1,430			
1	1,387	1,445			
0	1,438	1,459			
0	1,493	1,472			
0	1,552	1,484			
9	1,615	1,495			
6	1,683	1,506			
1	1,755	1,517			
4	1,832	1,527			
	1,915	1,536			
	2,003	1,545			
	2,097	1,553			
	2,197	1,561			
	2,303	1,568			
	2,416	1,575			
	2,536	1,582			
	2,664	1,588			
	2,800	1,594			
	2,944	1,600			
	3,096	1,606			
	3,258	1,611			
	3,429	1,616			

Appendice E2

FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE

$$k = 1,4$$

M	$\frac{T_0}{T^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
0	0	0	2,4000	1,2679	0
0,05	0,01192	0,01430	2,3916	1,2657	0,00598
0,10	0,04678	0,05602	2,3669	1,2591	0,02367
0,15	0,10196	0,12181	2,3267	1,2486	0,05235
0,20	0,17355	0,20661	2,2727	1,2346	0,09091
0,25	0,25684	0,30440	2,2069	1,2177	0,13793
0,30	0,34686	0,40887	2,1314	1,1985	0,19183
0,35	0,43894	0,51413	2,0487	1,1779	0,25096
0,40	0,52903	0,61515	1,9608	1,1566	0,31372
0,45	0,61393	0,70803	1,8699	1,1351	0,37865
0,50	0,69136	0,79012	1,7778	1,1140	0,44445
0,55	0,75991	0,85987	1,6860	1,09397	0,51001
0,60	0,81892	0,91670	1,5957	1,07525	0,57447
0,65	0,86833	0,96081	1,5080	1,05820	0,63713
0,70	0,90850	0,99289	1,4235	1,04310	0,69751
0,75	0,94009	1,01403	1,3427	1,03010	0,75525
0,80	0,96394	1,02548	1,2658	1,01934	0,81012
0,85	0,98097	1,02854	1,1931	1,01091	0,86204
0,90	0,99207	1,02451	1,1246	1,00485	0,91097
0,95	0,99814	1,01463	1,06030	1,00121	0,95692
1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1,05	0,99838	0,98161	0,94358	1,00121	1,04030
1,10	0,99392	0,96031	0,89086	1,00486	1,07795
1,15	0,98721	0,93685	0,84166	1,01092	1,1131
1,20	0,97872	0,91185	0,79576	1,01941	1,1459
1,25	0,96886	0,88581	0,75294	1,03032	1,1764
1,30	0,95798	0,85917	0,71301	1,04365	1,2050
1,35	0,94636	0,83227	0,67577	1,05943	1,2316

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
1,40	0,93425	0,80540	0,64102	1,07765	1,2564
1,45	0,92184	0,77875	0,60860	1,0983	1,2796
1,50	0,90928	0,75250	0,57831	1,1215	1,3012
1,55	0,89669	0,72680	0,55002	1,1473	1,3214
1,60	0,88419	0,70173	0,52356	1,1756	1,3403
1,65	0,87184	0,67738	0,49881	1,2066	1,3580
1,70	0,85970	0,65377	0,47563	1,2402	1,3745
1,75	0,84785	0,63096	0,45390	1,2767	1,3901
1,80	0,83628	0,60894	0,43353	1,3159	1,4046
1,85	0,82504	0,58773	0,41440	1,3581	1,4183
1,90	0,81414	0,56734	0,39643	1,4033	1,4311
1,95	0,80359	0,54774	0,37954	1,4516	1,4432
2,00	0,79339	0,52893	0,36364	1,5031	1,4545
2,05	0,78355	0,51087	0,34866	1,5579	1,4652
2,10	0,77406	0,49356	0,33454	1,6161	1,4753
2,15	0,76493	0,47696	0,32122	1,6780	1,4849
2,20	0,75614	0,46106	0,30864	1,7434	1,4939
2,25	0,74767	0,44582	0,29675	1,8128	1,5024
2,30	0,73954	0,43122	0,28551	1,8860	1,5104
2,35	0,73173	0,41724	0,27487	1,9634	1,5180
2,40	0,72421	0,40383	0,26478	2,0450	1,5252
2,45	0,71700	0,39100	0,25523	2,1311	1,5320
2,50	0,71005	0,37870	0,24616	2,2218	1,5385
2,55	0,70340	0,36691	0,23754	2,3173	1,5446
2,60	0,69699	0,35561	0,22936	2,4177	1,5505
2,65	0,69084	0,34478	0,22158	2,5233	1,5560
2,70	0,68494	0,33439	0,21417	2,6342	1,5613
2,75	0,67926	0,32442	0,20712	2,7508	1,5663
2,80	0,67380	0,31486	0,20040	2,8731	1,5711
2,85	0,66855	0,30568	0,19399	3,0013	1,5757
2,90	0,66350	0,29687	0,18788	3,1358	1,5801
2,95	0,65865	0,28841	0,18205	3,2768	1,5843

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
3,00	0,65398	0,28028	0,17647	3,4244	1,5882
3,50	0,61580	0,21419	0,13223	5,3280	1,6198
4,00	0,58909	0,16831	0,10256	8,2268	1,6410
4,50	0,56983	0,13540	0,08177	12,502	1,6559
5,00	0,55555	0,11111	0,06667	18,634	1,6667
6,00	0,53633	0,07849	0,04669	38,946	1,6809
7,00	0,52437	0,05826	0,03448	75,414	1,6896
8,00	0,51646	0,04491	0,02649	136,62	1,6954
9,00	0,51098	0,03565	0,02098	233,88	1,6993
10,00	0,50702	0,02897	0,01702	381,62	1,7021
∞	0,48980	0	0	∞	1,7143

Appendice E3
FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE

$k = 1,67$

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
0	0	0	2,670	1,299	0
0,05	0,01325	0,01767	2,659	1,297	0,00665
0,10	0,05183	0,06896	2,626	1,289	0,02626
0,15	0,11243	0,1490	2,573	1,276	0,05790
0,20	0,19020	0,2506	2,503	1,259	0,10011
0,25	0,2794	0,3653	2,418	1,239	0,1511
0,30	0,3742	0,4849	2,321	1,216	0,2089
0,35	0,4693	0,6018	2,216	1,192	0,2715
0,40	0,5606	0,7103	2,107	1,168	0,3371
0,45	0,6448	0,8062	1,995	1,144	0,4040
0,50	0,7201	0,8870	1,884	1,1202	0,4709
0,55	0,7853	0,9519	1,774	1,0981	0,5366
0,60	0,8402	1,0010	1,667	1,0778	0,6003
0,65	0,8853	1,0354	1,565	1,0597	0,6614
0,70	0,9213	1,0565	1,468	1,0438	0,7195
0,75	0,9491	1,0662	1,377	1,0303	0,7744
0,80	0,9697	1,0660	1,291	1,0193	0,8260
0,85	0,9842	1,0578	1,210	1,0108	0,8742
0,90	0,9935	1,0432	1,135	1,0048	0,9192
0,95	0,9985	1,0235	1,0649	1,0012	0,9611
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,05	0,9987	0,9736	0,9398	1,0012	1,0361
1,10	0,9952	0,9454	0,8839	1,0046	1,0695
1,15	0,9899	0,9158	0,8321	1,0103	1,1005
1,20	0,9833	0,8855	0,7842	1,0181	1,1292
1,25	0,9757	0,8550	0,7397	1,0280	1,156
1,30	0,9674	0,8246	0,6985	1,0400	1,181
1,35	0,9586	0,7946	0,6603	1,0540	1,204

M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
1,40	0,9495	0,7652	0,6249	1,0700	1,225
1,45	0,9403	0,7365	0,5919	1,0880	1,245
1,50	0,9310	0,7087	0,5612	1,108	1,263
1,55	0,9217	0,6818	0,5327	1,130	1,280
1,60	0,9125	0,6559	0,5062	1,154	1,296
1,65	0,9035	0,6309	0,4814	1,179	1,311
1,70	0,8947	0,6069	0,4583	1,206	1,324
1,75	0,8862	0,5840	0,4367	1,235	1,337
1,80	0,8779	0,5620	0,4165	1,266	1,349
1,85	0,8699	0,5410	0,3976	1,299	1,360
1,90	0,8621	0,5209	0,3799	1,334	1,371
1,95	0,8546	0,5018	0,3633	1,370	1,381
2,00	0,8474	0,4835	0,3477	1,408	1,391
2,05	0,8405	0,4660	0,3330	1,448	1,400
2,10	0,8338	0,4493	0,3192	1,490	1,408
2,15	0,8274	0,4334	0,3062	1,534	1,415
2,20	0,8213	0,4183	0,2940	1,580	1,423
2,25	0,8154	0,4038	0,2824	1,628	1,430
2,30	0,8097	0,3899	0,2715	1,678	1,436
2,35	0,8043	0,3767	0,2612	1,729	1,442
2,40	0,7991	0,3641	0,2514	1,783	1,448
2,45	0,7941	0,3521	0,2422	1,839	1,454
2,50	0,7893	0,3406	0,2334	1,897	1,459
2,55	0,7847	0,3296	0,2251	1,956	1,464
2,60	0,7803	0,3191	0,2173	2,018	1,469
2,65	0,7761	0,3090	0,2098	2,082	1,473
2,70	0,7721	0,2994	0,2027	2,148	1,477
2,75	0,7682	0,2902	0,1959	2,216	1,481
2,80	0,7644	0,2814	0,1895	2,287	1,485
2,85	0,7608	0,2730	0,1834	2,360	1,489
2,90	0,7574	0,2649	0,1775	2,435	1,493
2,95	0,7541	0,2571	0,1719	2,512	1,496

M	$\frac{T_D}{T_D^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{u}{u^*}$
3,00	0,7509	0,2497	0,1666	2,587	1,499
3,50	0,7251	0,1897	0,1244	3,521	1,524
4,00	0,7072	0,1484	0,09632	4,716	1,541
4,50	0,6943	0,1191	0,07669	6,213	1,553
5,00	0,6848	0,0975	0,06246	8,044	1,561
6,00	0,6721	0,06870	0,04368	12,86	1,573
7,00	0,6642	0,05092	0,03224	19,44	1,580
8,00	0,6590	0,03920	0,02475	28,07	1,584
9,00	0,6553	0,03110	0,01959	39,05	1,587
10,00	0,6528	0,02526	0,01589	52,66	1,589
∞	0,6414	0	0	∞	1,599

Appendice F

VALORI DI FUNZIONI RICORRENTI DELL'ESPONENTE k

k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,67
$\frac{1}{k-1}$	∞	10,0000	5,0000	3,3333	2,5000	1,4925
$\frac{k}{k-1}$	∞	11,0000	6,0000	4,3333	3,5000	2,4925
$\frac{k}{k+1}$	0,5000	0,5238	0,5455	0,5652	0,5833	0,6255
$\frac{2}{k+1}$	1,0000	0,9524	0,9091	0,8696	0,8333	0,7491
\sqrt{k}	1,0000	1,0488	1,0955	1,1402	1,1832	1,2923
$1/\sqrt{k}$	1,0000	0,9535	0,9129	0,8771	0,8452	0,7738
$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2}$	1,0000	0,9759	0,9535	0,9325	0,9129	0,8655
$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$	1,0000	0,5993	0,5920	0,5853	0,5786	0,5623
$k\left(\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$	∞	13,1846	7,1040	5,0727	4,0502	2,8031
$\sqrt{k}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)}$	1,0000	0,6285	0,6485	0,6674	0,6846	0,7267
$\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$	1,0000	0,5848	0,5645	0,5380	0,5282	0,4867
$\frac{k+1}{k-1}$	∞	21,0000	11,0000	7,6667	6,0000	3,9851
$\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}$	∞	4,5826	3,3166	2,7689	2,4495	1,9963

Appendice G

PROPRIETÀ DI GAS ALLO STATO IDEALE
ALLA TEMPERATURA DI 20 °C

	M	c _p	c _v	k	R	
					$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{joule}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$
	$\frac{\text{kg}}{\text{kgmole}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	[c _p /c _v]	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{joule}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$
Argon.	39,95	0,1244	0,0747	1,665	0,0497	208,18
Elio.	4,003	1,2416	0,7455	1,665	0,4964	2077,7
Aria.	28,97	0,240	0,1714	1,40	0,0686	287,09
Idrogeno.	2,016	3,419	2,434	1,405	0,9857	4125,5
Azoto.	28,016	0,2484	0,1775	1,399	0,0709	296,87
Ossigeno.	32	0,2193	0,1572	1,395	0,0621	259,9
Anidride carb. .	44,01	0,2016	0,1565	1,288	0,0452	188,98
Vapor d'acqua. .	18,016	0,4454	0,3352	1,329	0,1103	461,645
Ammoniaca. . .	17,032	0,5004	0,3898	1,304	0,1167	488,31
Metano.	16,042	0,5321	0,4083	1,303	0,1238	518,45
Propano.	44,094	0,3985	0,3535	1,127	0,045	188,62

Costante universale dei gas:

$\bar{R} = 848 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$

$\bar{R} = 8317 \frac{\text{joule}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$

$\bar{R} = 1,987 \frac{\text{kcal}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$ oppure $\frac{\text{Btu}}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$

$\bar{R} = 0,08206 \frac{\text{litri} \cdot \text{atm}}{\text{gmole}^\circ\text{K}}$ oppure $\frac{\text{m}^3 \cdot \text{atm}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$

$\bar{R} = 10,73 \frac{\text{psi} \cdot \text{ft}^3}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$

$\bar{R} = 0,730 \frac{\text{atm} \cdot \text{ft}^3}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$

Appendice H

FATTORI DI CONVERSIONE FRA UNITÀ DI MISURA

a) Unità di lunghezza

UNITÀ DI MISURA	m	cm	ft	in
1 m	1	10 ²	3,281	39,37
1 cm	10 ⁻²	1	3,281 · 10 ⁻²	0,3937
1 ft	0,3048	30,48	1	12
1 in	2,54 · 10 ⁻²	2,54	0,0833	1

b) Unità di massa

UNITÀ DI MISURA	g	kg	u.p.m.	lb (pound)	slug
1 g	1	10 ⁻³	1,02 · 10 ⁻⁴	2,205 · 10 ⁻³	6,82 · 10 ⁻⁵
1 kg	10	1	0,102	2,205	6,82 · 10 ⁻²
1 u.p.m.	9,81 · 10 ³	9,81	1	21,6	0,67
1 lb	454	0,454	4,63 · 10 ⁻²	1	0,031
1 slug	14,6 · 10 ³	14,6	1,49	32,174	1

c) Unità di forza

UNITÀ DI MISURA	dina	newton	kgf	pdl (poundal)	lbf (pound)
1 dina	1	10 ⁻⁵	1,02 · 10 ⁻⁶	7,23 · 10 ⁻⁵	2,24 · 10 ⁻⁶
1 N	10 ⁵	1	0,102	7,23	0,224
1 kgf	9,81 · 10 ⁵	9,81	1	70,9	2,20
1 pdl	1,38 · 10 ⁴	0,138	1,41 · 10 ⁻²	1	0,031
1 lbf	4,44 · 10 ⁵	4,44	0,454	32,174	1

ONENTE k

1,4	1,67
33 2,5000	1,4925
33 3,5000	2,4925
52 0,5833	0,6255
56 0,8333	0,7491
402 1,1832	1,2923
771 0,8452	0,7738
325 0,9129	0,8655
853 0,5786	0,5623
0727 4,0502	2,8031
6674 0,6846	0,7267
5880 0,5282	0,4867
6667 6,0000	3,9851
2,7689 2,4495	1,9963

d) Unità di pressione

UNITÀ DI MISURA	baria = 1 dina/cm ²	newton m ²	kgf/m ² = 1 mm H ₂ O	Bar	atm (fisica)	ata (kgf/cm ²)	mm Hg	lbf/ft ²	lbf/in ² (p.s.i.)
1 baria	1	0,1	1,02 · 10 ⁻²	10 ⁻⁶	9,87 · 10 ⁻⁷	1,02 · 10 ⁻⁶	7,5 · 10 ⁻⁴	2,09 · 10 ⁻³	1,45 · 10 ⁻⁵
1 $\frac{N}{m^2}$	10	1	0,102	10 ⁻⁵	9,87 · 10 ⁻⁶	1,02 · 10 ⁻⁵	7,5 · 10 ⁻³	2,09 · 10 ⁻²	1,45 · 10 ⁻⁴
1 $\frac{kgf}{m^2}$	98,1	9,81	1	9,81 · 10 ⁻⁵	9,68 · 10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	7,36 · 10 ⁻²	0,205	1,42 · 10 ⁻³
1 Bar	10 ⁶	10 ⁵	102 · 10 ²	1	0,987	1,02	7,5 · 10 ²	2088	14,50
1 atm. fis.	1,013 · 10 ⁶	1,013 · 10 ⁵	1,033 · 10 ⁴	1,013	1	1,033	760	2117	14,696
1 ata	9,81 · 10 ⁵	9,81 · 10 ⁴	10 ⁴	0,981	0,968	1	735,5	2047	14,22
1 mm Hg	1,33 · 10 ³	133	13,595	0,133 · 10 ⁻²	1,31 · 10 ⁻³	1,36 · 10 ⁻³	1	2,78	1,98 · 10 ⁻²
1 $\frac{lbf}{ft^2}$	479,0	47,9	4,88	479 · 10 ⁻⁶	4,73 · 10 ⁻⁴	489 · 10 ⁻⁶	0,359	1	6,94 · 10 ⁻³
1 $\frac{lbf}{in^2}$	6,89 · 10 ⁴	6,89 · 10 ³	703,0	0,069	0,068	0,0703	51,7	144	1

e) Unità di energia

UNITÀ DI MISURA	erg	joule (assoluto)	kgf.m	ft.pdl	ft.lbf	kwh	Btu _{IT}	kcal _{IT}	litri.atm	Cv.h	HP.h
1 erg	1	10 ⁻⁷	1,02 · 10 ⁻⁸	2,37 · 10 ⁻⁶	7,38 · 10 ⁻⁸	2,78 · 10 ⁻¹⁴	9,48 · 10 ⁻¹¹	2,39 · 10 ⁻¹¹	9,87 · 10 ⁻¹⁰	3,776 · 10 ⁻¹⁴	3,725 · 10 ⁻¹⁴
1 joule _{ass}	10 ⁷	1	0,102	23,7	0,738	2,78 · 10 ⁻⁷	9,48 · 10 ⁻⁴	2,39 · 10 ⁻⁴	9,87 · 10 ⁻³	3,776 · 10 ⁻⁷	3,725 · 10 ⁻⁷
1 kgf.m	9,81 · 10 ⁷	9,81	1	233	7,23	2,73 · 10 ⁻⁶	9,30 · 10 ⁻³	2,34 · 10 ⁻³	9,68 · 10 ⁻²	3,704 · 10 ⁻⁶	3,653 · 10 ⁻⁶
1 ft. poundal	4,21 · 10 ⁵	0,042	4,30 · 10 ⁻³	1	0,031	1,17 · 10 ⁻⁸	4,00 · 10 ⁻⁵	1,01 · 10 ⁻⁵	4,16 · 10 ⁻⁴	1,59 · 10 ⁻⁸	1,569 · 10 ⁻⁸
1 ft. lbf	1,36 · 10 ⁷	1,36	0,138	32,174	1	3,77 · 10 ⁻⁷	1,29 · 10 ⁻³	3,24 · 10 ⁻⁴	0,013	5,12 · 10 ⁻⁷	5,05 · 10 ⁻⁷
1 kwh	3,6 · 10 ¹³	3,6 · 10 ⁶	3,67 · 10 ⁵	8,53 · 10 ⁷	2,66 · 10 ⁶	1	3,41 · 10 ³	859,84	3,54 · 10 ⁴	1,3596	1,3410
1 Btu _{IT}	1,06 · 10 ¹⁰	1,06 · 10 ³	107,6	2,5 · 10 ⁴	778	2,93 · 10 ⁻⁴	1	0,252	10,4	3,985 · 10 ⁻⁴	3,93 · 10 ⁻⁴
1 kcal _{IT}	4,186 · 10 ¹⁰	4,186 · 10 ³	427	9,93 · 10 ⁴	3,09 · 10 ³	1,16 · 10 ⁻³	3,97	1	41,3	1,5812 · 10 ⁻³	1,5596 · 10 ⁻³
1 litro.atm	1,013 · 10 ⁹	1,013 · 10 ²	10,33	2,4 · 10 ³	74,7	2,8 · 10 ⁻⁵	0,096	2,42 · 10 ⁻²	1	3,825 · 10 ⁻⁵	3,773 · 10 ⁻⁵
1 Cv.h	2,648 · 10 ¹³	2,648 · 10 ⁶	270'000	6,283 · 10 ⁷	1,9529 · 10 ⁶	0,735	2509,6	632,4	2,61 · 10 ⁴	1	0,9863
1 HP.h	2,684 · 10 ¹³	2,684 · 10 ⁶	273'745	6,37 · 10 ⁷	1,98 · 10 ⁶	0,7457	2544,5	641,2	2,65 · 10 ⁴	1,013	1

A) Unità di energia specifica

UNITÀ DI MISURA	$\frac{\text{joule}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{kgf}\cdot\text{m}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{kwh}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}}{\text{lb}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{lb}}$	$\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}^2}$
$1 \frac{\text{joule}}{\text{kg}}$	1	0,102	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-7}$	0,334	$4,28 \cdot 10^{-4}$	10,752
$1 \frac{\text{kgf}\cdot\text{m}}{\text{kg}}$	9,81	1	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-5}$	3,29	$4,21 \cdot 10^{-3}$	105,26
$1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	$4,186 \cdot 10^3$	427	1	$1,16 \cdot 10^{-3}$	1400,56	1,802	$44,05 \cdot 10^4$
$1 \frac{\text{kwh}}{\text{kg}}$	$3,6 \cdot 10^6$	$3,67 \cdot 10^5$	860	1	$1,207 \cdot 10^6$	$15,5 \cdot 10^2$	$3,86 \cdot 10^7$
$1 \frac{\text{lb}\cdot\text{ft}}{\text{lb}}$	2,995	0,304	$7,14 \cdot 10^{-4}$	$8,28 \cdot 10^{-6}$	1	$1,29 \cdot 10^{-3}$	32,2
$1 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}}$	2335	237	0,555	$6,45 \cdot 10^{-4}$	778	1	$2,5 \cdot 10^4$
$1 \frac{\text{ft}^2}{\text{sec}^2}$	0,093	0,0095	$22,2 \cdot 10^{-5}$	$0,259 \cdot 10^{-7}$	0,031	$0,4 \cdot 10^{-4}$	1

$1 \frac{\text{ft}^2}{\text{sec}^2}$	0,093	0,0095	$22,2 \cdot 10^{-6}$	$0,259 \cdot 10^{-7}$	0,031	$0,4 \cdot 10^{-4}$	1
--------------------------------------	-------	--------	----------------------	-----------------------	-------	---------------------	---

g) Unità di potenza

UNITÀ DI MISURA	$\frac{\text{erg}}{\text{sec}}$	watt	$\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$	kw	Cv	$\frac{\text{ft} \cdot \text{lb}}{\text{sec}}$	HP	$\frac{\text{kcal}}{\text{IT}} \frac{\text{IT}}{\text{h}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{IT}} \frac{\text{IT}}{\text{h}}$
$1 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$	1	10^{-7}	$1,02 \cdot 10^{-8}$	10^{-10}	$1,36 \cdot 10^{-10}$	$7,38 \cdot 10^{-8}$	$1,34 \cdot 10^{-10}$	$0,860 \cdot 10^{-7}$	$3,414 \cdot 10^{-7}$
1 w	10^7	1	0,102	10^{-5}	$1,36 \cdot 10^{-3}$	0,738	$1,34 \cdot 10^{-3}$	0,860	3,414
$1 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{sec}}$	$9,81 \cdot 10^7$	9,81	1	$9,81 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	7,24	$1,31 \cdot 10^{-2}$	8,453	33,48
1 kw	10^{10}	10^3	102	1	1,36	$7,38 \cdot 10^2$	1,34	860	3412
1 Cv	$7,36 \cdot 10^9$	736	75	0,736	1	543	0,986	632,4	2510
$1 \frac{\text{ft} \cdot \text{lb}}{\text{sec}}$	$1,36 \cdot 10^7$	1,36	0,139	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1,84 \cdot 10^{-3}$	1	$1,82 \cdot 10^{-3}$	1,165	4,626
1 HP	$7,45 \cdot 10^9$	745,2	76,5	0,745	1,01	550	1	641,1	2544
$1 \frac{\text{kcal}}{\text{IT}} \frac{\text{IT}}{\text{h}}$	$1,16 \cdot 10^7$	1,16	0,1183	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-3}$	0,658	$1,56 \cdot 10^{-3}$	1	3,97
$1 \frac{\text{Btu}}{\text{IT}} \frac{\text{IT}}{\text{h}}$	$2,93 \cdot 10^6$	0,293	$2,988 \cdot 10^{-2}$	$2,93 \cdot 10^{-4}$	$3,985 \cdot 10^{-4}$	0,216	$3,93 \cdot 10^{-4}$	0,252	1

BIBLIOGRAFIA

- E. A. BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE e J. MATHIEU, *Mecanique des fluides*
1) Généralités, statistique des fluides, écoulements à une dimension, Dunod, Parigi 1968.
- A. J. CHAPMAN e W. F. WALKER, *Introductory gas dynamics*, Holt, Rinehart and Winston, inc. New York 1971.
- A. G. HANSEN, *Fluid Mechanics*, John Wiley and Sons, inc. New York 1967.
- L. MATTAROLO, *Termodinamica applicata* (2ª ed.), Cleup, Padova 1972.
- E. F. OBERT e R. L. YOUNG, *Elements of thermodynamics and heat transfer*, Mc. Graw-Hill Book Company, inc. New York 1962.
- G. F. C. ROGERS e Y. R. MAYHEW, *Engineering Thermodynamics, Work and Heat Transfer (S.I. Units)*, Longmans, London, 1967.
- R. M. RORTY, *Introduction to gas dynamics*, John Wiley and Sons, inc. New York 1962.
- A. H. SHAPIRO, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, The Ronald Press Company, New York 1953.
- M. W. ZEMANSKY, *Calore e termodinamica*, Zanichelli, Bologna 1970.

INDICE

<i>Prefazione</i>	Pag. 5
<i>Ringraziamento</i>	" 7
<i>Simbologia</i>	" 9
Cap. I - EQUAZIONI FONDAMENTALI PER IL MOTO MONODIMENSIONALE	" 13
1.1. Definizioni	" 13
1.2. Modulo di comprimibilità (o di elasticità) di un fluido	" 15
1.3. Leggi fondamentali in problemi di gasdinamica	" 16
1.4. Velocità del suono. Numero di Mach	" 21
Problema 1.4.1.	" 25
Problema 1.4.2.	" 25
1.5. Stato di ristagno o di arresto	" 27
1.6. Moto adiabatico per gas ideali: velocità di riferimento; numero di Mach critico	" 33
Problema 1.6.1.	" 38
Cap. II - ONDE D'URTO NORMALI	" 41
2.1. Generalità	" 41
2.2. Equazioni fondamentali per un'onda d'urto normale	" 42
2.3. Onda d'urto normale in un gas ideale	" 43
2.4. Impossibilità di un'onda d'urto da moto subsonico a supersonico	" 48
Problema 2.4.1.	" 52
Cap. III - MOTO ISOENTROPICO	" 55
3.1. Moto isoentropico in condotti a sezione variabile. Teorema di Hugoniot	" 55

3.2. Lo stato critico * di riferimento per gas ideali Pag. 61
 Problema 3.2.1. " 66
 3.3. Massima portata specifica " 68
 Problema 3.3.1. " 70
 3.4. Ugello convergente. " 72
 3.5. Ugello convergente-divergente. " 76
 Problema 3.5.1. " 83
 3.6. Moto adiabatico con attrito in un ugello. Rendimento. " 90
 Problema 3.6.1. " 94

Cap. IV - MOTO CON ATTRITO IN CONDOTTI A SEZIONE COSTANTE " 99
 4.1. Generalità. Fattore di attrito " 99
 A - MOTO ADIABATICO " 108
 4.2. Generalità. " 108
 4.3. Relazioni di Fanno per gas ideali " 113
 4.4. Parametro limite di attrito. Lunghezza massima. " 115
 4.5. Stati di riferimento. Tabella di Fanno. " 119
 Problema 4.5.1. " 123
 4.6. Moto di Fanno con condizioni di ristagno iniziali fissate " 126
 Problema 4.6.1. " 142
 B - MOTO ISOTERMO PER UN GAS IDEALE. " 146
 4.7. Generalità. " 146
 Problema 4.7.1. " 153
 Cap. V - MOTO DI RAYLEIGH " 157
 5.1. Generalità. " 157
 5.2. Moto di Rayleigh per gas ideali. " 163
 Problema 5.2.1. " 171
 5.3. Stato finale in una trasformazione di Rayleigh. Limite alla quantità di calore scambiata. " 174
 Problema 5.3.1. " 181
 5.4. Moto di Rayleigh con condizioni di ristagno iniziali fissate. Limitazione di portata " 184
 Problema 5.4.1. " 191

Pag. 5
 " 7
 " 9
 " 13
 " 13
 " 15
 " 16
 " 21
 " 25
 " 25
 " 27
 " 33
 " 38
 " 41
 " 41
 " 42
 " 43
 " 48
 " 52
 " 55
 " 55

APPENDICI

Appendice A1 - FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ DI RISTAGNO PER GAS IDEALE $k = 1,3$ Pag. 197
 Appendice A2 - FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ DI RISTAGNO PER GAS IDEALE $k = 1,4$ " 200
 Appendice A3 - FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ DI RISTAGNO PER GAS IDEALE $k = 1,67$ " 203
 Appendice B1 - FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE $k = 1,3$ " 206
 Appendice B2 - FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE $k = 1,4$ " 208
 Appendice B3 - FUNZIONI DELL'ONDA D'URTO NORMALE PER GAS IDEALE $k = 1,67$ " 210
 Appendice C1 - FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE $k = 1,3$ " 212
 Appendice C2 - FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE $k = 1,4$ " 215
 Appendice C3 - FUNZIONI DEL MOTO DI FANNO PER GAS IDEALE $k = 1,67$ " 218
 Appendice D - FUNZIONE $f \cdot l_{max}/d$ DEL MOTO ISOTERMO PER GAS IDEALE. " 221
 Appendice E1 - FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE $k = 1,3$ " 226
 Appendice E2 - FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE $k = 1,4$ " 229
 Appendice E3 - FUNZIONI DEL MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALE $k = 1,67$ " 232
 Appendice F - VALORI DI FUNZIONI RICORRENTI DELL'ESPONENTE k " 235
 Appendice G - PROPRIETÀ DI GAS ALLO STATO IDEALE ALLA TEMPERATURA DI 20 °C " 236
 Appendice H - FATTORI DI CONVERSIONE FRA UNITÀ DI MISURA " 237
 Bibliografia " 241

