

Corso di laurea in Ingegneria dell'energia

Complementi di Elettrotecnica Circuitale
Reti in regime periodico non sinusoidale

M. Guarnieri

2017-18

CAPITOLO XX

RETI IN REGIME PERIODICO NON SINUSOIDALE

In questo capitolo esaminiamo le *reti elettriche in regime periodico non sinusoidale*, nelle quali tutte le grandezze elettriche sono periodiche di pari periodo T (§ 1.8.1-III), ma non presentano andamento sinusoidale isofrequenziale, a differenza di quanto avviene in regime sinusoidale, che ne è un caso particolare. Esaminiamo in particolare l'analisi svolta nel “*dominio della frequenza*”, che ricorre alla rappresentazione in serie di Fourier delle funzioni periodiche ed è applicabile alle reti di m -bipoli passivi ideali (resistori, induttori, condensatori ed eventualmente mutui induttori con parametri costanti) nelle quali agiscono generatori indipendenti che imprimono grandezze (*ingressi*) non sinusoidali.

XX.1 – SERIE DI FOURIER

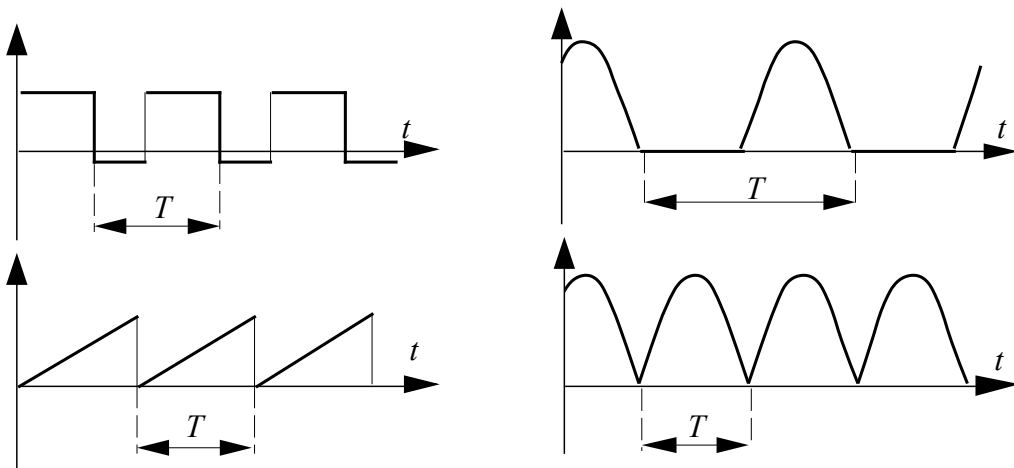


Figura xx.1.1

Una funzione $a(t)$ periodica e continua a tratti (come avviene alle funzioni periodiche di interesse pratico, alcuni esempi sono mostrati in Figura XX.1.1) è sviluppabile in **serie di Fourier**, che è esprimibile

come:

$$(XX.1.1) \quad a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{Mn} \text{sen}(n\omega t + \alpha_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$$

la (XX.1.1) è un modo di rappresentare $a(t)$.¹ In essa:

- A_0 è una costante che costituisce il *valore medio* (infatti gli altri addendi, sinusoidali, non contribuiscono al valore medio);
- $a_n(t) = A_{Mn} \text{sen}(\omega t + \alpha_n)$ $n=1, \dots$ sono le *armoniche*, sinusoidi aventi *ampiezza* A_{Mn} , *pulsazione angolare* $\omega_n = n\omega$ e *fase iniziale* α_n . Quella con $n=1$ è l'*armonica fondamentale* o *onda fondamentale* $a_1(t)$, quelle con $n>1$ sono le *armoniche superiori* o semplicemente *armoniche*.

Il periodo T di $a(t)$ è anche il periodo dell'armonica fondamentale $a_1(t)$ e ne definisce la pulsazione fondamentale $\omega = T/2\pi$. Le armoniche superiori hanno pulsazioni $\omega_n = n\omega$ multiple intere di ω e quindi periodo $T_n = T/n$. I coefficienti A_0, A_{Mn} , detti anche *coefficienti di Fourier*, e le fasi iniziali α_n sono dati dai seguenti integrali:

$$(XX.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{T} \int_T a(t) dt \\ A_{Mn} = \frac{2}{T} \sqrt{\left(\int_T a(t) \text{sen}(n\omega t) dt \right)^2 + \left(\int_T a(t) \text{cos}(n\omega t) dt \right)^2} \\ \alpha_n = \text{arctg} \frac{\int_T a(t) \text{cos}(n\omega t) dt}{\int_T a(t) \text{sen}(n\omega t) dt} \end{array} \right. .$$

¹ In quanto continua a tratti, $a(t)$ verifica le condizioni di Dirichlet: nei punti di continuità la serie converge ad $a(t)$, mentre nei punti di discontinuità converge al valore medio tra limite sinistro e limite destro. In Elettrotecnica viene preferita l'espressione (XX.1.1.1), che per ogni pulsazione $\omega_n = n\omega$ presenta una sola senoide con fase iniziale non nulla, all'espressione equivalente che, per ogni ω_n , considera la somma di un seno ed un coseno ciascuno con fase iniziale nulla:

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [S_{Mn} \text{sen}(n\omega t) + C_{Mn} \text{cos}(n\omega t)];$$

sono ovvie le relazioni trigonometriche che fissano l'equivalenza tra le due espressioni. Le funzioni $\{\text{sen}(n\omega t + \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ costituiscono una base ortogonale nello spazio vettoriale delle funzioni quadrato sommabili nell'intervallo T .

Insieme alle ampiezze A_{Mn} si considerano i valori efficaci delle armoniche sinusoidali, che valgono $A_n = A_{Mn} / \sqrt{2}$ come stabilisce la (14.1.1.2).

I) Valore efficace

Il valore efficace di una funzione periodica generica $a(t)$ è definito dalla (14.1.1.1). Disponendo della serie di Fourier (XX.1.1) di $a(t)$, questa può essere sostituita nella definizione (14.1.1.1) e con opportuni sviluppi si ottiene la seguente espressione, nota come *uguaglianza di Parseval*²:

$$(XX.1.3) \quad A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

ovvero: il *valore efficace* di una grandezza periodica generica è *calcolabile come radice quadrata della somma dei quadrati del valore medio A_0 e dei valori efficaci delle armoniche A_n .*

II) Caratteri di simmetria

L'analisi armonica di una funzione periodica $a(t)$ consiste nel determinare i *coefficienti* A_0 , A_{Mn} e α_n . Essa è semplificata da particolari simmetrie di $a(t)$, perché valgono le seguenti proprietà:

- se $a(t)$ è **alternata** $\Rightarrow A_0=0$;
- se $a(t)$ è **pari** [$a(t)=a(-t)$] $\Rightarrow \alpha_n=\pm\pi/2 \forall n$, ovvero le armoniche sono tutte coseni;
- se $a(t)$ è **dispari** [$a(t)=-a(-t)$] $\Rightarrow A_0=0$ e $\alpha_n=0 \forall n$, ovvero le armoniche sono tutte seni;
- se $a(t)$ antisimmetrica (in un semiperiodo ha valori opposti rispetto a quelli dell'altro semiperiodo) [$a(t)=-a(t+T/2)$] $\Rightarrow A_0=0$, $A_{2n}=0 \forall n$, ovvero la serie è priva del termine costante e ha solo armoniche di ordine dispari.

III) Troncamento della serie di Fourier

La serie di Fourier in generale ha un numero infinito di armoniche, sicché se la somma infinita è troncata alle sole armoniche di ordine fino a k (trascurando le armoniche di ordine superiore a αk), si introduce un errore di troncamento tanto più contenuto quanto maggiore

² Questa semplice espressione discende dal fatto che le funzioni $\sin(n\omega t + \alpha_n)$ sono ortogonali nello spazio delle funzioni quadrato sommabili nell'intervallo T .

è k . Dato che le funzioni periodiche di interesse pratico hanno armoniche con A_{Mn} rapidamente decrescenti all'aumentare di n , limitando la somma a poche armoniche (spesso sono sufficienti le prime tre o quattro armoniche), si introduce un'approssimazione generalmente accettabile.

XX.1.1 – ESEMPIO DI SERIE TRONCATA

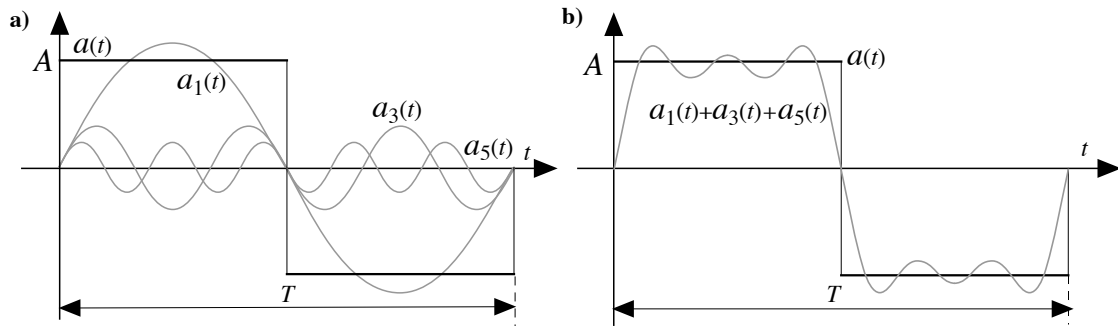


Figura XX.1.1.2

Una funzione $a(t)$ periodica di periodo T ad onda quadra (Figura XX.1.1.2-a) è definita come:

$$(XX.1.1.1) \quad a(t) = \begin{cases} A & \text{per } 0 \leq t < T/2 \\ -A & \text{per } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

Applicando le (XX.2.2) si ottiene la serie:

$$(XX.1.1.2) \quad a(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \frac{\text{sen } \omega t}{1} + \frac{\text{sen } 3\omega t}{3} + \frac{\text{sen } 5\omega t}{5} + \dots + \frac{\text{sen } n\omega t}{n} + \dots \right\}.$$

In accordo con quanto detto per le simmetrie, essendo $a(t)$ dispari e antisimmetrica nei due semiperiodi, le armoniche sono tutte seni di ordine dispari. Le loro armoniche A_{Mn} decrescono come $1/n$. In Figura XX.1.1.1-b è mostrata la somma della fondamentale, della terza e della quinta armonica: si vede come esse sono sufficienti a fornire una discreta approssimazione dell'onda quadra.

XX.2 – BIPOLI IN REGIME PERIODICO NON SINUSOIDALE

XX.2.1 – GENERALITÀ

Abbiamo visto nel capitolo 15 che quando una tensione (o una corrente) sinusoidale è applicata ad un bipolo lineare, tale risulta pure

l'altra grandezza (corrente o tensione). Il comportamento cambia quando viene meno una delle due condizioni:

- Se una tensione (o una corrente) *periodica non sinusoidale* è applicata ad un *bipolo lineare*, tale risulta pure l'altra grandezza (corrente o tensione).
- Se una tensione (o una corrente) *sinusoidale* è applicata ad un *bipolo non lineare*, l'altra grandezza (corrente o tensione) risulta periodica non sinusoidale.

In entrambi i casi il bipolo si trova in regime periodico non sinusoidale, dato che la tensione o la corrente o entrambe sono non sinusoidali; se esse presentano forme d'onda diverse si dice che sono *distorte* l'una rispetto all'altra. Lo studio dei bipoli (ed anche dei doppi bipoli) in regime periodico non sinusoidale avviene per lo più “*nel dominio della frequenza*”, facendo uso degli sviluppi in serie di Fourier, anche se a rigore la sua applicazione diretta è corretta solo nel primo caso.

XX.2.2 – GRANDEZZE ELETTRICHE AI MORSETTI

Ricorrendo alla serie di Fourier e ai valori efficaci delle armoniche A_n , la tensione e la corrente di un bipolo in regime periodico non sinusoidale si possono scrivere come:

$$(XX.2.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \alpha_n) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \\ i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \beta_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \end{array} \right. ,$$

essendo $V_{Mn} = \sqrt{2} V_n$ e $I_{Mn} = \sqrt{2} I_n$ le ampiezze. I valori efficaci di tensione e corrente valutati per mezzo della (XX.1.3), sono:

$$(XX.2.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \sqrt{V_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} \\ I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} \end{array} \right. .$$

XX.2.3 – POTENZE SCAMBIATE

I) Potenza istantanea

La *potenza istantanea* scambiata da un bipolo in regime periodico è data, come in ogni altro regime di funzionamento, dal prodotto dei valori istantanei di tensione e corrente: $p(t)=v(t)i(t)$ ed è anch'essa una funzione periodica.

II) Potenza attiva

La definizione di *potenza attiva* (o semplicemente *potenza*) P , come valore medio della potenza istantanea $p(t)$, dato in (15.1.1.7) vale in qualsiasi regime periodico e ad essa sono proporzionali gli scambi energetici su intervalli di tempo molto più lunghi del periodo. Esprimendo $v(t)$ e $i(t)$ con le loro serie di Fourier, facendone il prodotto, e utilizzando l'espressione ottenuta per calcolare la potenza attiva con la (15.1.1.7), si ottiene (*teorema di Parseval*):

$$(XX.2.3.1) \quad P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad ,$$

dove $P_n = V_n I_n \cos \varphi_n$ è la potenza attiva associata a tensione e corrente di n -esima armonica, $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ il loro sfasamento e $\cos \varphi_n = \cos(\alpha_n - \beta_n)$ il relativo fattore di potenza. La (XX.3.3.2) è notevole perché dimostra che in regime periodico *la potenza attiva è pari alla somma della potenza associata agli addendi costanti di tensione e corrente e delle potenze attive associate alle singole armoniche*. Tale conclusione appare sorprendente, perché stabilisce la sovrapposizione delle potenze delle armoniche, mentre sappiamo che in generale non vale la sovrapposizione delle potenze (§ 8.4-I). Tale proprietà deriva dal fatto che gli integrali dei prodotti di armoniche di tensione e corrente aventi ordine diverso forniscono contributo nullo alla potenza media in un periodo³.

III) Potenza apparente e fattore di potenza

In regime periodico generico la *potenza apparente* è definita, come in regime sinusoidale, uguale al prodotto dei valori efficaci di tensione e corrente:

³ Ovvero, armoniche di ordine diverso sono funzioni ortogonali.

$$(XX.2.3.2) \quad \boxed{S \triangleq VI} \quad ;$$

ricorrendo alle (XX.2.2.2) si ottiene anche:

$$(XX.2.3.3) \quad S = \sqrt{\left(V_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2\right) \left(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)}.$$

Risulta sempre $S \geq |P|$, ovvero $|P|/S \leq 1$. Anche in regime periodico non sinusoidale tale rapporto non maggiore di uno è chiamato *fattore di potenza* e, per estensione di quanto fatto in regime sinusoidale, è indicato come:

$$(XX.2.3.4) \quad \cos\phi \triangleq \frac{P}{S} \quad ,$$

anche se in questo contesto esso è un simbolo privo di significato trigonometrico.

IV) Rifasamento e compensazione delle armoniche

Come in regime sinusoidale, anche in regime periodico non sinusoidale *la condizione di funzionamento ottimale dei sistemi elettrici, ossia il loro migliore sfruttamento, si realizza quando la potenza apparente è minima a parità di potenza attiva P*; si ha allora:

$$(XX.2.3.5) \quad S = |P| \quad \text{ovvero} \quad |\cos\phi| = 1 \quad .$$

Questi criteri sono formalmente uguali a quelli di funzionamento ottimale in *regime sinusoidale*, considerati in § 15.1.1-III e § 17.7-II, trattando il *rifasamento del carico*. Peraltro per ottenere il funzionamento ottimale in regime periodico non sinusoidale non sono sufficienti le tecniche di rifasamento proprie del regime sinusoidale. Si ricorre invece a tecniche (per lo più elettroniche) atte ad assicurare il *rifasamento alla pulsazione fondamentale* e la **compensazione delle armoniche superiori**, con l'obiettivo di limitare il più possibile la quantità N , chiamata **potenza non-attiva**, legata alla potenza apparente ed alla potenza attiva dalla relazione:

$$(XX.2.3.6) \quad S^2 = P^2 + N^2 \quad .$$

In alcune analisi vengono considerate anche la **potenza reattiva** Q , per analogia con la potenza attiva P , e la **potenza deformante** D , definite come:

$$(XX.2.3.7) \quad Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \quad ,$$

$$(XX.2.3.8) \quad D = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left[V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2 - 2V_n V_m I_n I_m \cos(\varphi_n - \varphi_m) \right]}$$

esse sono tali che $N^2 = Q^2 + D^2$ e quindi $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$. D è nulla in particolare per:

$$(XX.2.3.9) \quad \frac{V_n}{V_m} = \frac{I_n}{I_m} \quad , \quad \varphi_n = \varphi_m \quad \forall n, m$$

tali condizioni sono verificate se tensione e corrente hanno gli stessi contenuti armonici, ovvero le due grandezze periodiche hanno andamenti simili e non sono deformate una rispetto all'altra.⁴

XX.3 – ANALISI DELLE RETI IN REGIME PERIODICO

XX.3.1 – RETI ELETTRICHE IN REGIME PERIODICO

Come già detto, l'analisi nel “*dominio della frequenza*”, qui presentata, è applicabile alle reti lineari, formate da m -bipoli passivi ideali nelle quali agiscono generatori indipendenti che imprimono grandezze (*ingressi*) non sinusoidali.

⁴ Con lo sviluppo dell'elettronica di potenza, hanno acquistato larga diffusione regimi periodici caratterizzati da un forte contenuto armonico, nei quali Q e la D possono perdere significato applicativo. Ad esempio si può avere $Q=0$ quando le potenze reattive associate alle diverse armoniche sono non nulle e di entrambi i segni, in modo da compensarsi tra loro.

XX.3.2 – INGRESSI PERIODICI NON SINUSOIDALI

Nelle ipotesi poste, gli *ingressi* della rete, ovvero le grandezze periodiche $e(t)$ e $j(t)$ impresse dai generatori di tensione e di corrente, sono sviluppabili in serie di Fourier:

$$(XX.3.2.1) \quad e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \operatorname{sen}(n\omega t + \alpha_{en}) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \quad ,$$

$$(XX.3.2.2) \quad j(t) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} J_n \operatorname{sen}(n\omega t + \beta_{jn}) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} j_n(t) \quad .$$

La (XX.3.2.1) può essere interpretata come la somma delle tensioni impresse da più generatori ideali di tensione in serie, ciascuno avente tensione uguale ad un suo addendo (Figura XX.3.2.1). Dualmente la (XX.3.2.2) può essere interpretata come la somma delle correnti impresse da più generatori ideali di corrente in parallelo, ciascuno avente corrente uguale ad un suo addendo (Figura XX.3.2.2).

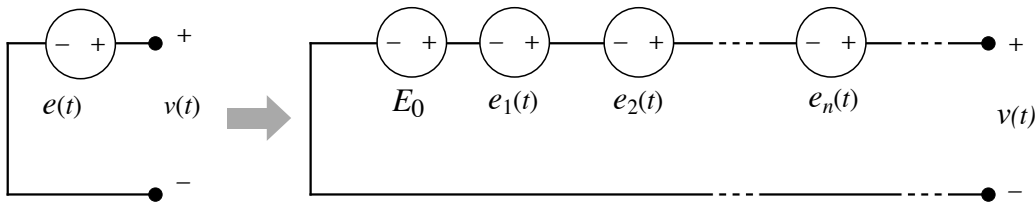


Figura XX.3.2.1

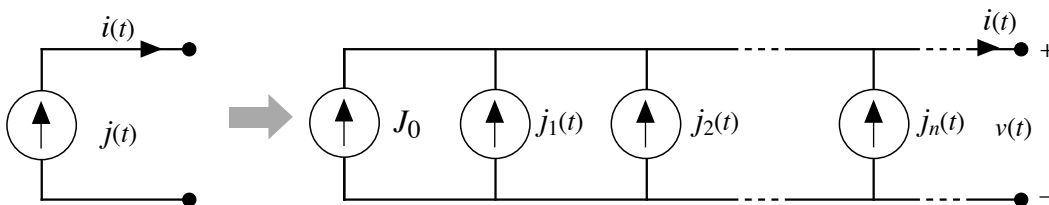


Figura XX.3.2.2

XX.3.3 – ANALISI ALLE ARMONICHE

Avendo assunto la rete lineare ed è possibile utilizzare il *teorema di sovrapposizione degli effetti*, facendo agire di volta in volta gli addendi di uguale ordine d'armonica che compaiono nelle (XX.3.2.1) e (XX.3.2.2): prima tutti gli addendi costanti E_0 e J_0 , poi gli addendi di

armonica fondamentale $e_1(t)$ e $j_1(t)$, quindi gli addendi di seconda armonica $e_2(t)$ e $j_2(t)$, e così via per le altre armoniche.

I) Grandezze impresse costanti

L'azione contemporanea di tutte le grandezze impresse costanti E_0 e J_0 produce gli addendi costanti V_0 e I_0 delle tensioni e correnti incognite (XX.2.2.1). Esse corrispondono alle soluzioni di regime stazionario e si determinano con i metodi di analisi propri delle reti in tale regime. Gli induttori equivalgono ad interruttori chiusi ed i condensatori ad interruttori aperti e quindi solo i resistori definiscono il rapporto tra tensioni e correnti dei bipoli passivi:

$$(XX.3.3.1) \quad R = \frac{V_0}{I_0}, \quad G = \frac{I_0}{V_0}.$$

II) Grandezze impresse di pulsazione $\omega_n = n\omega$

L'azione contemporanea delle grandezze impresse $e_n(t)$ e $j_n(t)$ di n -esima armonica (sinusoidali isofrequenziali di pulsazione $\omega_n = n\omega$), produce le armoniche $v_n(t)$ e $i_n(t)$ delle tensioni e correnti incognite (XX.2.2.1). Esse corrispondono alla soluzione di regime sinusoidale a pulsazione ω_n e sono determinabili con i metodi di analisi propri delle reti in regime sinusoidale, in particolare con il calcolo simbolico. I resistori presentano sempre il medesimo valore di resistenza R (indipendentemente da ω_n); gli induttori e i condensatori presentano invece reattanze $X_{Ln} = \omega_n L = n\omega L$ e $X_{Cn} = -1/\omega_n C = -1/n\omega C$, le prime crescenti al crescere di n , le seconde decrescenti. A causa del diverso valore assunto dalle reattanze alle diverse ω_n , ogni bipolo passivo della rete presenta impedenza:

$$(XX.3.3.2) \quad \dot{Z}_n = \frac{\overline{V}_n}{\overline{I}_n} = Z_n e^{j\varphi_n},$$

che varia con la pulsazione ω_n , sia nel modulo Z_n che nell'argomento φ_n . Dato che su ogni bipolo passivo è $Z_n = V_n/I_n$ e $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$, in ogni bipolo la relazione tensione-corrente è diversa ad ogni diversa armonica n .

XX.3.4 – TENSIONI E CORRENTI DI LATO

Le *uscite* della rete, ovvero le tensioni e le correnti incognite $v(t)$ e $i(t)$ dei lati, si ottengono infine sommando gli effetti prodotti dalle grandezze impresse alle diverse pulsazioni: le somme forniscono le $v(t)$ e $i(t)$ direttamente espresse in serie di Fourier nelle forme (XX.2.2.1). Esse presentano le seguenti caratteristiche:

- sono tutte periodiche di periodo T , pari al periodo delle grandezze impresse (che è il periodo comune delle armoniche fondamentali);
- sono alternate se lo sono tutte le grandezze impresse ($V_0=0$ e $I_0=0$);
- hanno (al più) gli stessi ordini di armoniche delle grandezze impresse.

I) Deformazione delle tensioni e correnti

A causa della dipendenza da n , della (XX.3.3.2), risulta:

$$(XX.3.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_n = \frac{V_{Mn}}{I_{Mn}} \neq \frac{V_{Mm}}{I_{Mm}} = Z_m \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{Mn}}{V_{Mm}} \neq \frac{I_{Mn}}{I_{Mm}} \quad ; \\ \varphi_n = \alpha_n - \beta_n \neq \alpha_m - \beta_m = \varphi_m \quad \Rightarrow \quad \alpha_n - \alpha_m \neq \beta_n - \beta_m \end{array} \right.$$

ciò significa che tensioni e correnti non presentano gli stessi contenuti armonici, ovvero, che le loro forme d'onda sono deformate (hanno forme diverse). Quindi in generale, una rete lineare con generatori periodici non sinusoidali deforma le tensioni e correnti⁵. Sono esenti da questo effetto le reti i cui elementi passivi sono tutti resistori, perché in tal caso non si manifesta il diverso comportamento al variare di n ⁶.

II) Conservazione delle potenze attive e reattive

Dato che a ciascuna armonica vale la conservazione delle potenze attive e reattive (§ 16.3.6) e vale anche la sovrapposizione delle potenze attive (XX.2.3.1) e reattive (XX.2.3.7), si verifica pure la conservazione delle potenze attive e reattive dell'intera rete in regime periodico: la

⁵ Invece, come abbiamo visto nel capitolo 15, una rete lineare con generatori sinusoidali isofrequenziali ha tutte le tensioni e correnti di lato sinusoidali isofrequenziali con gli ingressi. È questa proprietà che assicura importanza metodologica alle reti in regime sinusoidale.

⁶ In realtà esistono anche reti contenenti induttori e condensatori che, grazie alla loro particolare topologia e tipologia, sono esenti da deformazione.

somma delle potenze attive erogate da alcuni bipoli è pari alla somma delle potenze attive assorbite dagli altri.

XX.3.5 – ESEMPI DI RETI NON DEFORMANTI

I) RETI RESISTEVE

Se in una rete tutti i bipoli passivi sono tutti resistori (rete resistiva, priva di reattanze), le impedenze dei lati risultano reali e indipendenti da ω_n , diversamente da quanto indica la (XX.3.3.3), e pertanto le tensioni e correnti non sono deformate una rispetto all'altra, ossia hanno la stessa forma.

II) RETI OHMICO-REATTIVE NON DEFORMANTI

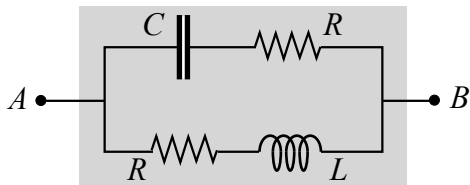


Figura xx.3.5.1

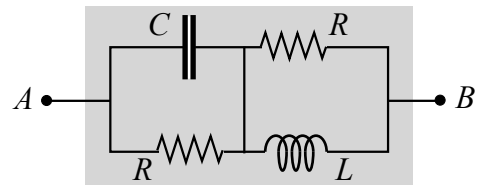


Figura xx.3.5.2

Esistono anche reti contenenti elementi reattivi che non deformano. Ad esempio la rete di Figura xx.3.5.1, ove i due resistori abbiano resistenze uguali R tale che $R^2=L/C$. Con pochi passaggi e tenendo conto di tale relazione, si verifica che alla pulsazione ω_n il parallelo delle serie RC e LR ha impedenza:

$$(xx.3.5.1) \quad \dot{Z}_{tot} = \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega_n C}\right)(R + j\omega_n L)}{\left(R - j\frac{1}{\omega_n C}\right) + (R + j\omega_n L)} = R \frac{RC\omega_n \left(1 + \frac{L}{CR^2}\right) + j(LC\omega_n^2 - 1)}{RC\omega_n^2 + j(LC\omega_n^2 - 1)} = R.$$

L'impedenza equivalente ai morsetti A e B è resistiva pura e non è presente deformazione tra tensione e corrente a tali morsetti.

Il caso duale del precedente è presentato in Figura xx.3.5.2, ove i due resistori hanno resistenze uguali $G=1/R$ e tali che $G^2=C/L$. Si verifica che l'ammettenza totale vale $\dot{Y}_{tot}=G$.

XX.3.6 – ESEMPIO DI ANALISI IN FREQUENZA

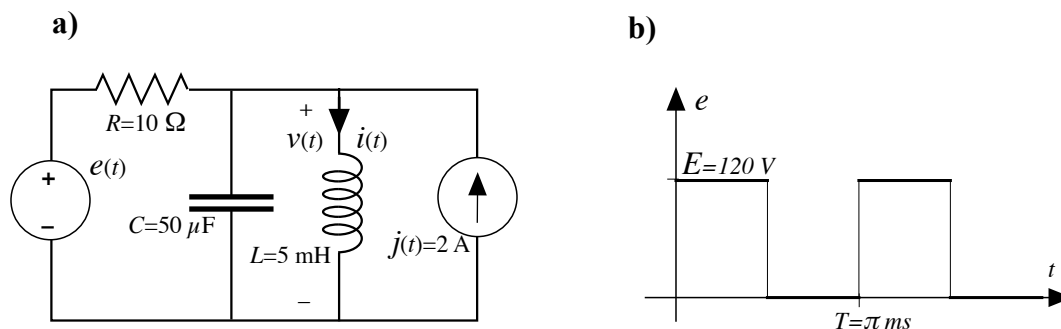


Figura xx.3.6.1

La rete di Figura xx.3.6.1-a è nel regime periodico imposto dal generatore di corrente costante $j(t)=J_0=2$ A e dal generatore di tensione che produce un'onda $e(t)$ quadra con ampiezza $E=120$ V e periodo $T=\pi$ ms ($\cong 3,14$ ms), e quindi con pulsazione fondamentale $\omega=2\pi/T=2000$ rad/s (Figura 19.3.2.1-b). Intendiamo determinare l'andamento della tensione $v(t)$ e della corrente $i(t)$ dell'induttore accettando per $e(t)$ lo sviluppo in serie di Fourier troncato alla quinta armonica:

$$(xx.3.6.1) \quad e(t) = 60 + \frac{240}{\pi} \text{sen } 2000t + \frac{80}{\pi} \text{sen } 6000t + \frac{48}{\pi} \text{sen } 10000t ,$$

Analizzando la rete nel dominio della frequenza va affrontato lo studio delle quattro reti esaminate nel seguito.

I) ADDENDI COSTANTI

Gli addendi costanti dei due ingressi sono: $E_0=60$ V e $J_0=2$ A. Per valutare i loro effetti consideriamo la rete in regime stazionario (Figura xx.3.6.2) dalla quale si ottengono gli addendi costanti delle grandezze incognite:

$$(xx.3.6.2) \quad V_0 = 0 \text{ V} \quad , \quad I_0 = \frac{E_0}{R} + J_0 = 8 \text{ A} .$$

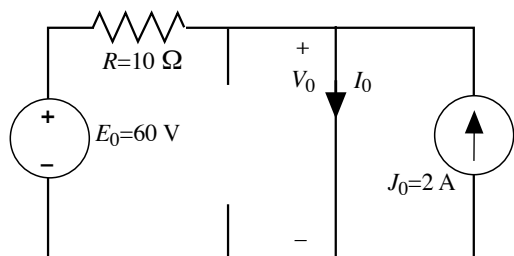


Figura xx.3.6.2

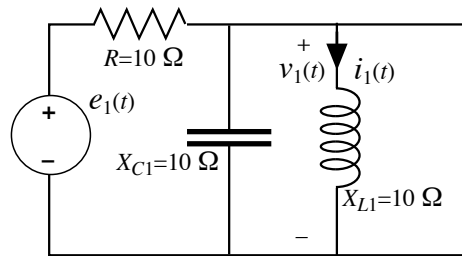


Figura xx.3.6.3

II) ARMONICHE FONDAMENTALI

Solo il generatore di tensione imprime l'armonica fondamentale: $e_1(t)=(240/\pi)\text{sen}2000t$ V; invece il generatore di corrente equivale ad un circuito aperto. La rete si presenta come in Figura xx.3.6.3, con le reattanze che alla pulsazione fondamentale $\omega=2000$ rad/s valgono:

$$(xx.3.6.3) \quad X_{C1} = -\frac{1}{\omega C} = -10 \Omega \quad , \quad X_{L1} = \omega L = 10 \Omega ;$$

condensatore ed induttore sono in antirisonanza ed equivalgono ad un circuito aperto, sicché la corrente del resistore è nulla. Applicando il metodo fasoriale si ottiene:

$$(xx.3.6.4) \quad \bar{V}_1 = \bar{E}_1 = \frac{240}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{jX_{L1}} = -j \frac{24}{\sqrt{2\pi}} = \frac{24}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\pi/2} .$$

che antitrasformate nel dominio nel tempo forniscono le armoniche fondamentali delle grandezze incognite:

$$(xx.3.6.5) \quad v_1(t) = \frac{240}{\pi} \text{sen}2000t \text{ V} \quad , \quad i_1(t) = \frac{24}{\pi} \text{sen}\left(2000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A} .$$

III) TERZE ARMONICHE

Anche le terze armoniche sono impresse solo dal generatore di tensione che presenta $e_3(t) = (80/\pi) \text{sen}6000t$ V; quindi la rete si presenta simile a quella di Figura xx.3.6.3, salvo che agisce il generatore di tensione $e_3(t)$, con pulsazione $3\omega = 6000$ rad/s, e le reattanze induttiva e capacitiva diventano:

$$(xx.3.6.5) \quad X_{C3} = -\frac{1}{3\omega C} = -\frac{10}{3} \Omega \quad , \quad X_{L3} = 3\omega L = 30 \Omega .$$

Applicando il metodo fasoriale alla terza armonica, la tensione impressa è $\bar{E}_3 = 80/\sqrt{2\pi}$ e l'impedenza del parallelo di condensatore e induttore vale:

$$(xx.3.6.5) \quad \dot{Z}_{p3} = \frac{jX_{L3} jX_{C3}}{jX_{L3} + jX_{C3}} = j \frac{X_{L3} X_{C3}}{X_{L3} + X_{C3}} = -j3,75$$

I fasori delle terze armoniche delle incognite sono quindi:

$$(xx.3.6.6) \quad \begin{cases} \bar{V}_3 = \bar{E}_3 \frac{\dot{Z}_{p3}}{R + \dot{Z}_{p3}} = \frac{80}{\sqrt{2\pi}} \frac{-j3,75}{10 - j3,75} = \frac{240}{\sqrt{2\pi}73} (3 - j8) \cong \frac{28,1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j1,21} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{jX_{L3}} = \frac{240}{\sqrt{2\pi}73} \frac{3 - j8}{j30} = \frac{8}{\sqrt{2\pi}73} (-8 - j3) \cong \frac{0,936}{\sqrt{2\pi}} e^{-j2,78} \end{cases} ;$$

che antitrasformate nel dominio nel tempo forniscono le terze armoniche delle grandezze incognite:

$$(xx.3.6.7) \quad v_3(t) = \frac{28,1}{\pi} \text{sen}(6000t - 1,21) \text{ V} \quad , \quad i_3(t) = \frac{0,936}{\pi} \text{sen}(6000t - 2,78) \text{ A} .$$

IV) QUINTE ARMONICHE

Per valutare gli effetti di quinta armonica, prodotti da $e_5(t) = (48/\pi) \text{sen}10000t$ V alla pulsazione $5\omega = 10000$ rad/s, si procede in modo analogo. Le reattanze induttiva e capacitiva assumono i valori:

$$(xx.3.6.8) \quad X_{C5} = -\frac{1}{5\omega C} = -2 \Omega \quad , \quad X_{L5} = 5\omega L = 50 \Omega .$$

La tensione impressa simbolica è $\bar{E}_5 = 48/\sqrt{2}\pi$ e l'impedenza equivalente al parallelo di condensatore e induttore è:

$$(xx.3.6.9) \quad \dot{Z}_{p5} = \frac{jX_{L5}jX_{C5}}{jX_{L5} + jX_{C5}} = j \frac{X_{L5}X_{C5}}{X_{L5} + X_{C5}} = -j \frac{25}{12} = -j2,083.$$

I fasori delle quinte armoniche delle incognite sono quindi:

$$(xx.3.6.10) \quad \begin{cases} \bar{V}_5 = \bar{E}_5 \frac{\dot{Z}_{p5}}{R + \dot{Z}_{p5}} = \frac{48}{\sqrt{2}\pi} \frac{-j\frac{25}{12}}{10 - j\frac{25}{12}} = \frac{240}{\sqrt{2}\pi 601} (5 - j24) \cong \frac{9,79}{\sqrt{2}\pi} e^{-j1,36} \\ \bar{I}_5 = \frac{\bar{V}_5}{jX_{L5}} = \frac{240}{\sqrt{2}\pi 601} \frac{5 - j24}{j50} = \frac{24}{\sqrt{2}\pi 3005} (-24 - j5) \cong \frac{0,196}{\sqrt{2}\pi} e^{-j2,93} \end{cases};$$

che antitrasformate nel dominio nel tempo forniscono le quinte armoniche delle grandezze incognite:

$$(xx.3.6.11) \quad v_5(t) = \frac{9,79}{\pi} \text{sen}(10000t - 1,36) \text{ V} \quad , \quad i_5(t) = \frac{0,196}{\pi} \text{sen}(10000t - 2,93) \text{ A}.$$

V) USCITE COMPLETE

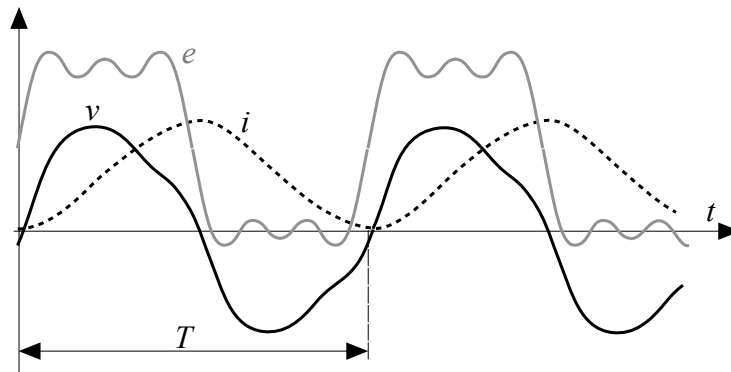


Figura xx.3.6.4

Sommando gli addendi costanti (xx.3.6.2) e le armoniche (xx.3.6.5), (xx.3.6.7) e (xx.3.6.11), si ottengono infine le uscite desiderate, già espresse in serie di Fourier:

$$(xx.3.6.12) \quad \begin{cases} v(t) = \frac{240}{\pi} \text{sen}2000t + \frac{28,1}{\pi} \text{sen}(6000t - 1,21) + \frac{9,79}{\pi} \text{sen}(10000t - 1,36) \text{ V} \\ i(t) = 8 + \frac{24}{\pi} \text{sen}\left(2000t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0,936}{\pi} \text{sen}(6000t - 2,78) + \frac{0,196}{\pi} \text{sen}(10000t - 2,93) \text{ A} \end{cases}$$

Gli andamenti di queste due funzioni sono illustrati in Figura xx.3.6.4, insieme con quelli di $e(t)$. Le uscite hanno forme d'onda deformate rispetto a quella della grandezza impressa ed anche deformate tra loro. Infatti le grandezze hanno contenuti armonici diversi, come illustra la Tabella xx.3.6.1.

Tabella xx.3.6.1

	I arm.	III arm.	V arm.
$e(t)$	100 %	33 %	20 %
$v(t)$	100 %	11,7 %	4,1 %
$i(t)$	100 %	3,9 %	0,8 %