Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - II incontro

Ex 1. Scrivere la forma algebrica del numero complesso:

$$z = \frac{(1-i)^{202}}{2^{100} i^{210}}$$

e determinare un polinomio di grado 3 a coefficienti reali che ammetta il numero z tra le proprie radici.

Ex 2. Determinare tutte le radici complesse del polinomio $p(z) = z^3 - i$ e rappresentarle nel piano di Gauss. Trovare, se possibile, un polinomio q(z) a coefficienti complessi tale che il prodotto $p(z)q(z)$ sia un polinomio a coefficienti reali.

Ex 3. Dati i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, discutere quali siano sottospazi vettoriali:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 3y\}$;

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z + 2y + 3\}$;

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}$;

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$.

Ex 4. Determinare un sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto al prodotto per scalare, ma non rispetto alla somma.

Ex 5. Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

calcolare le combinazioni lineari (se esistono) con cui essi generano i vettori:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ex 6. Nello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3, $\mathbb{R}^{[\leq 3]}[x]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \langle x^2 + x \rangle, \quad W = \langle 3x^3 + 6 \rangle.$$

Determinare dei generatori di $U \cap W$ e di $U + W$.