Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - III incontro

Ex 1. Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dire se sono linearmente indipendenti e calcolare le combinazioni lineari (se esistono) con cui essi generano i vettori:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ex 2. Nello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3, $\mathbb{R}^{[\leq 3]}[x]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \langle x^2 + x \rangle, \quad W = \langle 3x^3 + 6 \rangle.$$

Determinare dei generatori di $U \cap W$ e di $U + W$.

Ex 3. Nello spazio delle matrici $M_{2,2}(\mathbb{R})$, si consideri il sottospazio vettoriale:

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Determinare due sottospazi $W_1, W_2 \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$, tali che $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $V + W_1 = V + W_2 = \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Ex 4. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0, \ z = 0 \right\}.$$

Ex 5. Nello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$, si consideri il seguente sottoinsieme:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : b = c + 1 \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Si discuta se esso sia uno spazio vettoriale. In caso affermativo, calcolarne la dimensione ed esibirne una base. In caso negativo, si determini il più piccolo spazio vettoriale $V \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$ contenente E, se ne calcoli la dimensione e se ne esibisca una base.