Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - IV incontro

Ex 1. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0,\ z = 0 \right\}.$$

Ex 2. Nello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$, si consideri il seguente sottoinsieme:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : b = c + 1 \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Si discuta se esso sia uno spazio vettoriale. In caso affermativo, calcolarne la dimensione ed esibirne una base. In caso negativo, si determini il più piccolo spazio vettoriale $V \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$ contenente E, se ne calcoli la dimensione e se ne esibisca una base.

Ex 3. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Trovare delle equazioni cartesiane che lo identifichino.

Ex 4. Nello spazio vettoriale dei polinomi di grado inferiore a quattro $\mathbb{R}^{[\leq 3]}[x]$, si consideri il sottoinsieme (al variare di $c \in \mathbb{R}$):

$$V_c = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}^{[\leq 3]}[x] : 2a_1 - a_2 + a_3 = c \right\}.$$

Per ciascun valore del parametro c per cui V_c risulta un sottospazio vettoriale, si determini una base di V_c.

Ex 5. Nello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$, siano definiti i vettori:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2\pi - 1 & e \\ 0 & e \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trovi una base di $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di cui non facciano parte di multipli di v_1, di v_2, o di v_3.