# Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - VI incontro

**Ex 1.** Si consideri la seguente applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cosí definita:

$$f(x, y, z) = (2x + 4y, z - 2y).$$

Si dica se $f$ é lineare e se $f$ é iniettiva. Si scelga poi una base $v_1, v_2, v_3$ di $\mathbb{R}^3$ e si dica se le immagini dei vettori di tale base, $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, generano l'intero spazio $\mathbb{R}^2$.

**Ex 2.** Sia $f : \mathbb{R}^{[\leq 2]} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare cosí definita:

$$f(a_2x^2 + a_1x + a_0) := \begin{bmatrix} a_2 - a_1 & a_1 - a_2 \\ a_0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Si determini una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{Im} f$. Si scriva poi la matrice $F$ associata all'applicazione lineare $f$.

**Ex 3.** Siano $v_1$, $v_2$, $v_3 \in \mathbb{R}^3$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione. Siano noti i seguenti valori numerici:

- $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
- $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- $f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- $f(v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Si dica, in ciascuno dei seguenti casi, se in base alle informazioni disponibili l'applicazione $f$ risulta lineare e, in caso affermativo, se risulta univocamente determinata:

(a) $v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;
(b) $v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(v_3) = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;
(c) $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $f(v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.