Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - VII incontro

Ex 1. Si consideri la famiglia di applicazioni lineari $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ rappresentate dalle matrici F_a rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio:

$$F_a = \begin{bmatrix} 0 & -a-2 & 0 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & a+2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Discutere per quai valori di $a \in \mathbb{R}$ la controimmagine $f_a(1,0,1,0)^{-1}$ non é vuota. Per quali valori di a la controimmagine di qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^4$ risulta non vuota? E per quali valori di a la controimmagine di qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^4$ contiene al massimo un elemento?

Ex 2. Nello lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{[\leq 2]}[x]$ si consideri l'endomorfismo f:

$$\forall\ p(x) \in \mathbb{R}^{[\leq 2]}[x], \quad f(p(x)) := \frac{d}{dx}p(x).$$

Si scriva la matrice F di f rispetto alla base canonica del dominio e rispetto alla base canonica del codominio. Utilizzando tale matrice, si discutano l'iniettivitá e la suriettivitá di f. Si determinino una base di $\ker f$ e una di $\mathrm{Im} f$. Si calcoli infine la matrice $F_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ di f rispetto alla seguenti basi rispettivamente del dominio e del codominio: $\mathcal{B}_1 = \{x^2+1, x+1, x\}$, $\mathcal{B}_2 = \{x^2+x, x+1, x\}$.

Ex 3. Si dica, motivando la risposta, se esiste una applicazione lineare

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ e che il vettore $\begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ b-4a \end{bmatrix}$ sia nell'immagine $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$. In caso affermativo, determinarne la matrice associata rispetto a basi a scelta per il dominio e per il codominio, discutendo se i risultati esibiti siano l'unica scelta possibile.

Ex 4. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, con $f(x,y,z,t) = (x+3y, y+t, 2x+2y-4t)$ e $g(x,y,z) = (x+y, x+z, z+y, z+x+y)$, e si considerino le loro composte $h_1 = f \circ g$ e $h_2 = g \circ f$. È possibile stabilire a priori se h_1 e h_2 possono essere iniettive e suriettive? Trovare le matrici H_1 e H_2 rispetto alle basi canoniche e confrontare con quanto atteso.

Ex 5. Risolvere il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}.$$