

Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - VIII incontro

Ex 1. Si consideri l'endomorfismo f su \mathbb{R}^4 associato alla matrice:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

Si discuta, motivando la risposta, per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esso risulta invertibile. Posto poi $a = 2$, si calcoli la matrice dell'endomorfismo f^{-1} rispetto alla base canonica (sia per il dominio, sia per il codominio).

Ex 2. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cosí definita:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z + x + 2y \\ y + 2x + 4z \\ x - 4y + 5z \end{bmatrix}.$$

Si determini la matrice $F_{\mathcal{B}_C}$ associata ad f rispetto alla base canonica (sia per il dominio, sia per il codominio). Si determinino una base del nucleo

e una dell'immagine di f . Sia poi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Si determini

la matrice $F_{\mathcal{B}_1}$ associata ad f rispetto alla base \mathcal{B}_1 (sia per il dominio, sia per il codominio). Usando $F_{\mathcal{B}_1}$, si calcolino una base del nucleo di e una dell'immagine di f e le si confronti con quanto ottenuto in precedenza.

Ex 3. Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$ ammette soluzione, specificando l'unicitá. Posto poi $a = -2$, lo si risolva.

Ex 4. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & -14 & 21 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 13 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica, motivando la risposta, quali di esse possono essere simili.