

## Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - X incontro

**Ex 1.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si considerino i vettori:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare delle basi ortonormali di  $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  e di  $V^\perp$ .

**Ex 2.** Dati i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_3 = 0, 3x_1 - 2x_3 = 0 \right\}, \quad W = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si determini una base ortonormale di  $U := V + W$ .

**Ex 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi:

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad U = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Sia  $T \subseteq W$  l'insieme dei vettori di  $W$  tali che la proiezione ortogonale su  $V$  giaccia su  $U$ .  $T$  è uno spazio vettoriale? In caso affermativo, determinare una base o un sistema di equazioni che lo identifichino.

**Ex 4.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si considerino:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \right\}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini il vettore  $v \in V$  che rende minima la funzione  $f(v) := \|u - v\|$ .