Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - XI incontro

Ex 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi:

$$U = \langle \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 1 & -2\end{bmatrix}^T \rangle, \quad W = \langle \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T \rangle;$$

siano $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e su W rispettivamente.

(a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare ad una base ortonormale di $U + W$.

(b) Determinare $p_W(u)$, con $u = \begin{bmatrix}2 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$.

(c) Determinare un vettore $w \in W$ tale che $p_U(w) = u$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $\|p_U(v)\| = 0$ e $\|p_W(v)\| = \sqrt{6}$.

Ex 2. Si considerino la matrice $A_k = \begin{bmatrix}1 & 2k-2 & k+1 \\ 0 & 2k-1 & k \\ 0 & -2k+2 & -k\end{bmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, e la matrice $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

(a) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una base ortonormale di autovettori di B.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(d) Determinare, se esiste, un valore di $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia simile a B; determinare una matrice K tale che si abbia $B = K^{-1} A_{k_0} K$.

Ex 3. Si consideri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è:

$$A_k = \begin{bmatrix}2k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(b) Determinare i valori di k per cui esiste una matrice invertibile P tale che il prodotto PA_kP^T sia diagonale. Qual è l'applicazione lineare rappresentata da P? Specificare rispetto a quali basi.

(c) Si scriva un sistema di equazioni cartesiane che ammetta come soluzioni il sottospazio $\langle p_3 \rangle$, dove p_3 è la terza colonna della matrice P trovata al punto precedente.