Esercizi tutorato Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria - XIII incontro

Ex 1. Si consideri il sottospazio $U = \langle \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \rangle$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base di U e delle equazioni che lo definiscano.

(b) Sia $W = U^{\perp}$, determinare una base ortonormale di W.

(c) Detta $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W, determinare $\pi_W(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T)$.

(d) Detto $V = \langle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \rangle$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W.

Ex 2. Detto k un parametro reale, si considerino le matrici:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Per quali di k il vettore $v = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ è autovettore della matrice A_k? Esiste un k_0 tale che v sia nell'autospazio associato a $\lambda = 3$?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Trovare $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice B. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

Ex 3. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ($h \in \mathbb{R}$) definito da:

$$\phi_h(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad \phi_h(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} -1 & h & -1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\phi_h(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} h & 2 & h-2 \end{bmatrix}^T, \quad \phi_h(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} 0 & h+2 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

(a) Determinare $\phi_h(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T)$.

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_1)$ e una base di $\mathrm{Im}(\phi_1)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che ϕ_h non sia suriettivo.

(d) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T)$.

Ex 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ si considerino le rette:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \rangle.$$

(a) Trovare una forma parametrica di r e una cartesiana di s, la loro posizione reciproca e distanza.

(b) Determinare un piano π contenente s e tale che $\mathrm{dist}(r, \pi) = \mathrm{dist}(r, s)$.

Ex 5. Determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che si abbia:

$$2\frac{z}{1-i} + (1-2i)\bar{z} = 8 + 9i.$$