TUTORATO 4

ES 1

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (0,1,3,2)$, $u_3 = (2,1,-1,-2)$, $u_4 = (1,1,3,1)$.

a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3, u_4 sono linearmente dipendenti e scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri. Trovare una base di U.

b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, le cui soluzioni siano i vettori di U.

c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 = 0$. Trovare una base di W e una base di $U \cap W$.

d) È possibile trovare due sottospazi vettoriali $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^4$ che siano in somma diretta tra loro e tali che $U \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $U \oplus L_2 = \mathbb{R}^4$? Giustificare.

a) $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, .., 4$ $\quad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \text{III-II} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \cancel{2}\alpha_2 - \cancel{2}\alpha_3 + \cancel{2}\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{III-IV} \\ \text{III}/2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 + \cancel{\alpha_4} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cancel{\alpha_4} = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \cancel{\alpha_4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ -2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \text{linearmente dipendenti.}$$

Prendo ad es. $\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_4 = 0$. $u_3 = 2u_1 - u_2$.

Verifico se u_1, u_2, u_4 sono l.i.: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_4 u_4 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4 \\ -\cancel{\alpha_4} + \alpha_2 + \cancel{\alpha_4} = 0 \\ -\alpha_4 + 3\alpha_2 + 3\alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_4 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{l.i.} \Rightarrow \text{sono una base di } U.$$

b) $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U$ se $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma \\ 2\beta + \gamma \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_3 = \alpha + 3\beta + 3\gamma \\ x_4 = 2\beta + \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 - x_1 = \beta \\ x_3 - 3x_2 = -2\alpha \\ x_4 = 2x_2 - 2x_1 + \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ \beta = x_2 - x_1 \\ \gamma = 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\ x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_1 - 2x_2 + x_4 \end{cases}$$

Un'equazione è $2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

c) $\dim W = 4-1=3$. Osservo che i vettori $w=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ appartengono a W e sono l.i., quindi ne costituiscono una base.

Ora, prendo un generico vettore di U $v=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_4=\begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\\alpha+\beta+\gamma\\\alpha+3\beta+3\gamma\\2\beta+\gamma\end{pmatrix}\in U$

$v\in W \Leftrightarrow \alpha+\gamma+\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta+2\gamma=0$

$\Leftrightarrow \beta=-2\alpha-2\gamma$. $\Rightarrow$ dipende da 2 variabili libere $(\alpha,\gamma) \Rightarrow \dim U\cap W=2$.

Prendo $\alpha=1, \gamma=0 \Rightarrow \beta=-2$

$\alpha=0, \gamma=1 \Rightarrow \beta=-2$

Quindi, i vettori $u_1-2u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\\-4\end{pmatrix}$ e $-2u_2+u_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ sono una base di $U\cap W$.

d) Formula di Grassmann:

$$\underset{4}{\dim U+L_i}=\underset{3}{\dim U}+\dim L_i-\underset{0}{\dim U\cap L_i} \Rightarrow \dim L_i=1 \quad i=1,2$$

Osservo che $e_3\notin U$ $(2\cdot0-0-1+2\cdot0=-1\neq0)$ e che $e_4\notin U$ $(2\cdot0-0-0+2\cdot1=2\neq0)$ e che sia u_1,u_2,u_4,e_3 che u_1,u_2,u_4,e_4 sono linearmente indipendenti, (quindi una base di $\mathbb{R}^4$). Pertanto, prendendo $L_1=\langle e_3\rangle$, $L_2=\langle e_4\rangle$ si ha $L_1\oplus U=\mathbb{R}^4$ e $L_2\oplus U=\mathbb{R}^4$, ed, inoltre, $L_1\cap L_2=\langle 0\rangle$ (e_3,e_4 sono l.i.)

ES 2

Dati i vettori $w_1=(1,0,2,-1)$, $w_2=(1,1,-1,0)\in\mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio vettoriale generato da w_1 e w_2.

a) Determinare per quale valore di α il vettore $(1,3,\alpha,2)$ appartiene a W.

b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia W come insieme delle soluzioni.

c) Sia $U\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1+x_3+3x_4=0$. Completare la base $\{w_1,w_2\}$ di W a una base di U.

a) $(1,3,\alpha,2)\in W \Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R}$ t.c. $(1,3,\alpha,2)=aw_1+bw_2=(a+b,b,2a-b,-a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1=a+b\\3=b\\\alpha=2a-b\\2=-a\end{cases}$ $\begin{cases}1=-2+3=1\\b=3\\\alpha=-4-3=-7\\a=-2\end{cases}$ $(1,3,\alpha,2)\in W \Leftrightarrow \alpha=-7$.

b) $w=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in W \Leftrightarrow w=aw_1+bw_2=(a+b,b,2a-b,-a)$ $\exists a,b\in\mathbb{R}$.

$\begin{cases}x_1=a+b\\x_2=b\\x_3=2a-b\\x_4=-a\end{cases}$ $\begin{cases}a=-x_4\\b=x_2\\x_1=-x_4+x_2\\x_3=-2x_4-x_2\end{cases}$ Un sistema di equazioni è $\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\x_2+x_3+2x_4=0.\end{cases}$

c) $w_1 \in U$ $(1+2+3\cdot(-1)=3-3=0)$, $w_2 \in U$ $(1-1+3\cdot 0=0)$

Osservo che il vettore $e_2=(0,1,0,0)\in U$ $(0+0+3\cdot 0=0)$ e che i vettori w_1, w_2, e_2 sono l.i.

Poiché $\dim U = 4-1=3$, w_1, w_2, e_2 sono una base di U.

ES 3

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1=(0,2,0,-1)$, $u_2=(1,1,1,0)$. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ x_3+x_4=0 \end{cases}$$

a) Si determini la dimensione e una base di $U\cap V$.

b) Si determini la dimensione e una base di $U+V$.

a) $u = \alpha u_1+\beta u_2 \in U$ generico vettore di U. $\exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$= (\beta, 2\alpha+\beta, \beta, -\alpha)$

$u\in V \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\beta = 2\alpha+\beta-\alpha \\ \beta-\alpha=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\alpha = 2\alpha+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha} \\ \beta=\alpha \end{cases}$ $\{\beta=\alpha$ una variabile libera $\Rightarrow \dim U\cap V=1$

Prendo, ad es., $\alpha=1\Rightarrow\beta=1 \Rightarrow u=(1,3,1,-1)\in U\cap V$, quindi u è una base di $U\cap V$

b) Formula di Grassmann: $\dim U+V = \dim U+\dim V-\dim U\cap V = 2+2-1=3$.

$(\dim V = 4-2=2)$.

Osservo che il vettore $(1,1,0,0)\in V$ $\left(\begin{cases}1+0=1+0\\0+0=0\end{cases}\right)$ e che i vettori $u_1, u_2, (1,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti, pertanto essi formano una base di $U+V$.

ES 4

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U=\langle u_1,u_2\rangle$, ove $u_1=(-2,1,1,3)$, $u_2=(0,-1,2,1)$.

a) Si determini una base di un sottospazio W tale che $U\oplus W=\mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico.

b) Dato il vettore $v_t=(t,3,t-1,1)$, si dica per quale valore di t si ha $v_t\in U$.

c) Sia V il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2-2x_4=0 \end{cases}$

Si determini una base di V e una base di $U\cap V$.

a) u_1, u_2 l.i. $\Rightarrow \dim U=2$. Formula di Grassmann:

$\dim U+W = \dim U+\dim W-\dim U\cap W \Rightarrow \dim W = \underset{\dim\mathbb{R}^4=4}{\dim U+W} + \underset{0}{\dim U\cap W} - \underset{2}{\dim U}$

$= 4-2=2$.

Quindi, una base di W è data da 2 vettori w_1, w_2 t.c. $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$, cioè u_1, u_2, w_1, w_2 siano linearmente indipendenti.
Esistono infiniti vettori w_1, w_2 che soddisfano tale proprietà, ad es. prendendo $w_1 = e_1$, $w_2 = e_2$, oppure, prendendo $w_1 = e_1$, $w_2 = e_3$ o $w_1 = e_4$, $w_2 = e_2$ etc. etc. Pertanto, tale W non è unico.

b) $v_t = (t, 3, t-1, 1) \in U \Leftrightarrow v_t = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} t = -2\alpha \\ 3 = \alpha - \beta \\ t-1 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 3\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{IV}+\text{II} \quad \begin{cases} t = -2\alpha \\ 3 = \alpha - \beta \\ -2\alpha - 1 = \alpha + 2\beta \\ 4 = 4\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} t = -2 \\ 3 = 1 - \beta \\ -3 = 1 + 2\beta \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = -2 \\ \beta = -2 \\ -3 = -3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Quindi $v_t \in U \Leftrightarrow t = -2$.

c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -x_1 - x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -2x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

due variabili libere $(x_3, x_4) \Rightarrow \dim V = 2$
Prendo, ad es., $x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 3, x_1 = -4$
$x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = -2$
Quindi, i vettori $v_1 = (-4, 3, 0, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 1, 0)$ sono una base di V.

$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \in V \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \alpha - \beta + \alpha + 2\beta + 3\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + 2(\alpha - \beta) - 2(3\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$
$= (-2\alpha, \alpha - \beta, \alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta)$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 0 \\ -6\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\alpha = -2\beta \\ 0 = 0 \end{cases}$$ una variabile libera $(\beta) \Rightarrow \dim U \cap V = 1$

Prendendo, ad es., $\beta = 3 \Rightarrow \alpha = -2$. Quindi il vettore $u = -2u_1 + 3u_2 = (4, -5, 4, -3)$ è una base di $U \cap V$.

ES 5

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (2, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (4, -2, -1, -3)$ e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 2z = 0$.
a) Si determini la dimensione e una base di U.
b) Si dica per quale valore di t il vettore $(1+t, 1, 3, -1) = v$ appartiene a U.
c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
d) Si determinino la dimensione e una base di $U \cap W$.
e) Si determinino la dimensione e una base di $U + W$.

a) Considero la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2II-I \\ III-2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix}$$ matrice di rango $2 \Rightarrow \dim U = 2$

Quindi i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti ($u_3 = 3u_1 - 2u_2$).
Noto che u_1, u_2 sono l.i. $\Rightarrow$ sono una base di U.

b) $(1+t, 1, 3, -1) = v \in U \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_1)$ $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1+t = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_2 \\ 3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -1 = -\alpha_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+t = 2+1 \\ \alpha_2 = 1 \\ 3 = 1+2 = 3 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow t = 2.$$

c) $(x, y, z, w) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_1)$

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ w = -\alpha_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2w + y \\ \alpha_2 = y \\ z = -w + 2y \\ \alpha_1 = -w \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = y \\ \alpha_1 = -w \\ x - y + 2w = 0 \\ 2y - z - w = 0 \end{cases}$$

Delle equazioni cartesiane di U sono $\begin{cases} x - y + 2w = 0 \\ 2y - z - w = 0 \end{cases}$

d) $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in W \Leftrightarrow \cancel{2\alpha_1} + \alpha_2 + \alpha_2 + 2(\cancel{-\alpha_1}) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0.$

Ho una variabile libera (α_1) $\Rightarrow \dim U \cap W = 1$.
Prendo, ad es., $\alpha_1 = 1 \Rightarrow u_1 = (2, 0, 1, -1)$ è una base di $U \cap W$.

e) Formula di Grassmann:

$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 3 - 1 = 4$ ($\dim W = 4 - 1 = 3$).
$\Rightarrow \quad U+W = \mathbb{R}^4$ ed una base è la base canonica.

ES 6

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1=(0,3,-1,2)$ $v_2=(1,2,-2,0)$, $v_3=(2,1,t,-2)$.

(a) Determinare la dimensione di V al variare di $t\in\mathbb{R}$.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1+x_2+2x_4=0$. Si scriva una base di U

(c) Sia $W\subset U$ il sottospazio generato dai vettori $w_1=(1,1,0,-1)$, $w_2=(-2,0,1,1)$. Si trovi una base di un sottospazio $U'\subset\mathbb{R}^4$ tale che $U=W\oplus U'$.

(a) Verifico l'indipendenza lineare dei vettori v_1,v_2,v_3 al variare di $t\in\mathbb{R}$.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0 \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \iff \begin{cases}\beta+2\gamma=0\\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0\\ -\alpha-2\beta+t\gamma=0\\ 2\alpha-2\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=-2\gamma\\ \cancel{3\gamma}-4\gamma+\cancel{\gamma}=0\\ -\gamma+4\gamma+t\gamma=0\\ \alpha=\gamma\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=-2\gamma\\ (t+3)\gamma=0\\ \alpha=\gamma\end{cases} \quad \text{se } t\neq-3: \begin{cases}\beta=-2\gamma=0\\ \gamma=0\\ \alpha=\gamma=0\end{cases} \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow v_1,v_2,v_3 \text{ l.i.} \Rightarrow \dim V=3$$

$$\text{se } t=-3: \begin{cases}\beta=-2\gamma\\ 0=0\\ \alpha=\gamma\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=-2\gamma\end{cases} \Rightarrow v_1,v_2,v_3 \text{ lin. dipendenti.} \Rightarrow \dim V\leq 2.$$

Osservo che v_1,v_2 sono l.i. $\Rightarrow \dim V=2$.

(b) Osservo che i vettori $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\in U$. $\dim U=4-1=3$.

Verifico che sono linearmente indipendenti:

$$\alpha e_3+\beta u_1+\gamma u_2=0 \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \iff \begin{cases}\beta+2\gamma=0\\ -\beta=0\\ \alpha=0\\ -\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow \text{l.i.}$$

$\Rightarrow e_3,u_1,u_2$ sono una base di U.

(c) Osservo che w_1,w_2 sono l.i. $\Rightarrow \dim W=2$. Poiché $\dim U=3$ ed i sottospazi W, U' devono essere in somma diretta ($\dim U'\cap W=0$), per la formula di Grassmann si ha:

$$\dim U'=\underbrace{\dim(U'+W)}_{=\dim U=3}-\underbrace{\dim W}_{=2}+\underbrace{\dim U'\cap W}_{=0}=1$$

Quindi si tratta di trovare un vettore $u'\in U$, $u'\notin W$.

Noto che prendendo $u'=e_3\in U$, la condizione $u'\notin W$ è soddisfatta. Infatti:

$$u'=e_3\in W \iff e_3=\alpha w_1+\beta w_2 \quad \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R} \iff \begin{cases}0=\alpha-2\beta\\ 0=\alpha\\ 1=\beta\\ 0=-\alpha+\beta\end{cases} \begin{cases}0=-2\\ \alpha=0\\ \beta=1\\ 0=1\end{cases} \lightning$$

$\Rightarrow e_3\notin W \Rightarrow$ prendo U' sottospazio generato da $u'=e_3$, cioè $U'=\langle e_3\rangle$.