Esercizio 1. Siano W1 e W2 sottospazi vettoriali di V . Dimostrare che se W1 $\cup$ W2 \`e un sottospazio vettoriale di V allora deve necessariamente essere W1 $\subseteq$ W2 oppure W2 $\subseteq$ W1.

Esercizio 2. Sia U $\subset$ R4 il sottospazio vettoriale generato dai vettori u1 = (1, 1, 1, 0), u2 = (0, 1, 3, 2), u3 = (2, 1, −1, −2), u4 = (1, 1, 3, 1).

(a) Verificare che i vettori u1, u2, u3, u4 sono linearmente dipendenti e scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri. Trovare una base di U.

(b) Scrivere un'equazione, nelle incognite x1, x2, x3, x4, le cui soluzioni siano i vettori di U.

(c) Sia W $\subset$ R4 il sottospazio di equazione x1 + x2 = 0. Trovare una base di W e una base di U $\cap$ W .

(d) E' possibile trovare due sottospazi vettoriali L1, L2 $\subset$ R4 che siano in somma diretta tra loro e tali che

U $\oplus$ L1 = R4 e U $\oplus$ L2 = R4 ? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 3, 5, 1)$, $u_2 = (3, 0, 4, 2)$, $u_3 = (5, -4, 0, 2)$, $u_4 = (1, -2, -2, 0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (2, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (4, -2, -1, -3)$,e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 2z = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1 + t, 1, 3, -1)$ appartiene a U.

(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.

(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 4, -1, 1)$,

$u_2 = (1, -2, -1, -3)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e $2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (0, 1, -1, 3)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (2, -1, 0, 3)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.