TUTORATO 3

ES 1

Si stabilisca se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ formano:

(1) un insieme libero (cioè un insieme di vettori linearmente indipendenti). In caso affermativo, completarlo per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$, altrimenti determinare le relazioni di dipendenza lineare tra di loro ed estrarre da questo insieme di vettori almeno un insieme libero.

(2) un insieme di generatori. In caso affermativo estrarne almeno una base di $\mathbb{R}^4$, altrimenti determinare la dimensione del sottospazio da essi generato.

a) $v_1 = (0,2,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$, $v_3 = (3,0,1,1)$, $v_4 = (1,0,0,1)$;

b) $v_1 = (2,3,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (-3,0,1,2)$;

c) $v_1 = (1,2,2,2)$, $v_2 = (3,4,1,2)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $v_4 = (-2,0,3,0)$, $v_5 = (-1,-1,0,3)$.

a) Verifico se i 4 vettori sono lin. indipendenti:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \iff \begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2\alpha_1 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4 \\ \alpha_2 = 2\alpha_4 \\ 0 = 0 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ i vettori sono lin. DIPENDENTI

$\Rightarrow$ NON costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$

Per $\alpha_4 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -1$. $\Rightarrow v_4 = v_1 - 2v_2 + v_3$.

v_1, v_2, v_3 sono l.i.: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Quindi i 4 vettori dati generano sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$, una cui base è data per esempio da v_1, v_2, v_3. Per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ si possono considerare i vettori $v_1, v_2, v_3, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che sono l.i.

b) I tre vettori dati sicuramente non sono dei generatori di $\mathbb{R}^4$ (che ha dimensione 4). Verifico se sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \iff \begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \underset{\text{III}+2\text{IV}}{\iff} \begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \underset{\text{III}-\text{IV}}{\iff} \begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Si verifica che aggiungendo il vettore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha che v_1, v_2, v_3, e_1 sono l.i. e, quindi, costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

c) I 5 vettori dati sono sicuramente linearmente dipendenti, dato che il numero massimo di vettori l.i. in $\mathbb{R}^4$ è 4. Osservo che $v_2 = 2v_3 - v_1 + v_4$ e che i vettori v_1, v_3, v_4, v_5 sono l.i.:

$$\alpha v_1 + \beta v_3 + \gamma v_4 + \delta v_5 = 0 \iff \begin{cases} \alpha - 2\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\delta = 0 \end{cases} \iff \text{II-III} \begin{cases} \alpha - 2\gamma - \delta = 0 \\ -\delta - 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\delta = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 2\gamma + 3\gamma = 0 \rightsquigarrow \alpha = -\gamma \\ \delta = -3\gamma \\ -2\gamma + \beta + 3\gamma = 0 \rightsquigarrow \beta = -\gamma \\ -2\gamma - 9\gamma = 0 \rightsquigarrow \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

quindi v_1, v_3, v_4, v_5 costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

ES 2

Si determini una base del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$ di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_4 - \cancel{2x_5} - \cancel{x_2} + \cancel{2}x_2 - 2x_4 + \cancel{x_5} = 0 \\ x_1 = -x_4 - x_5 \\ x_3 = 2x_2 - 2x_4 + x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - 4x_4 - x_5 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 4x_4 + x_5 \\ x_1 = -x_4 - x_5 \\ x_3 = 2x_5 + 8x_4 - 2x_4 + x_5 = 6x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

sistema che ha infinite soluzioni dipendenti da 2 parametri (x_4, x_5) $\Rightarrow$ lo spazio V ha dimensione 2.

Pongo $x_4 = 1, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 6$
$x_4 = 0, x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$ $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V.

ES 3

Verificare se i vettori seguenti sono linearmente indipendenti e determinare in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. b) $(1,0,1), (0,2,2), (3,7,1)$ in $\mathbb{R}^3$

c) $(1,2,1,2,1), (2,1,2,1,2), (1,0,1,1,0), (0,1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^5$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$ non sono una base. Una base del sottospazio da essi generato è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ perché questi 2 vettori sono l.i.

b) $\alpha(1,0,1) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,7,1) = 0 \iff \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = -7\gamma \\ -9\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

essi generano, dunque, $\mathbb{R}^3$ e ne sono una base.

c) $(2,1,2,1,2) = 3(1,0,1,1,0) + 3(0,1,0,0,1) - (1,2,1,2,1) \Rightarrow$ linearmente dipendenti.
Osservo che $(1,0,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,2,1,2,1)$ sono l.i. $\Rightarrow$ formano una base del sottospazio generato dai 4 vettori.

ES 4

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ sottosp. gen. dai vettori $u_1 = (2,1,3,-1)$ e $u_2 = (1,2,-1,4)$

a) Verificare che il vettore $u = (5,1,10,-7)$ appartiene a U e trovare le coordinate di u rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U.

b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$. Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare una base di $V \cap W$ e di $V+W$. È possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$?

a) $u \in U \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta$ t.c. $u = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ \alpha+2\beta \\ 3\alpha-\beta \\ -\alpha+4\beta \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta = 5 \\ \alpha+2\beta = 1 \\ 3\alpha-\beta = 10 \\ -\alpha+4\beta = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \text{III}+\text{I} \\ \text{IV}+\text{II} \end{array} \begin{cases} 2\alpha+\beta = 5 \\ \alpha+2\beta = 1 \\ 5\alpha = 15 \\ 6\beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-1 = 5 \ \checkmark \\ 3-2 = 1 \ \checkmark \\ \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow u = 3u_1 - 1u_2 \Rightarrow u \in U$ e le sue coordinate nella base $\{u_1, u_2\}$ sono $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $U \subset V$ se i suoi generatori u_1, u_2 soddisfano l'equazione che definisce V, cioè se i generatori di U appartengono a V.

$u_1 \in V \Leftrightarrow 2\cdot 2 - 3\cdot 1 + (-1) = 0$
$\quad 4-3-1 = 0 \ \checkmark$

$u_2 \in V \Leftrightarrow 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4 = 0$
$\quad 2-6+4 = 0 \ \checkmark$

$\Rightarrow U \subset V$.

Noto che il vettore $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$. Verifico se u_1, u_2, e_3 sono linearmente indip.:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta = 0 \\ \alpha+2\beta = 0 \\ 3\alpha-\beta+\gamma = 0 \\ -\alpha+4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha - 4\alpha = 0 \rightsquigarrow -3\alpha = 0 \rightsquigarrow \alpha = 0 \\ 5\alpha + \gamma = 0 \rightsquigarrow \gamma = -5\alpha \\ -\alpha - 8\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1, u_2, e_3 \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Poiché V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da un'equazione, V ha dimensione $4-1=3$.
Pertanto i 3 vettori l.i. u_1, u_2, e_3 formano una base di V.

c) $V \cap W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$, da cui si ricava

$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = x_1 + 2x_4 \end{cases}$ Quindi ci sono 2 incognite libere di variare (x_1, x_4), il che significa che $V \cap W$ ha dimensione 2.

Pongo $x_1 = 3, x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2, x_3 = 3$
$\quad\quad x_1 = 0, x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = 1, x_3 = 6$

quindi una base di $V \cap W$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Dalla formula di Grassmann si ricava che: $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W) \overset{!}{=} 3+3-2 = 4$

Noto che il vettore $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in W$. Verifico che i vettori $\begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix}, \underset{V}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{W}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}$ sono l.i.:

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 2\alpha+\beta+\delta = 0 \\ 3\alpha+6\beta+\gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Quindi $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $V+W$. Oppure: base canonica e_1, e_2, e_3, e_4.

Poiché $U \not\subset W$ (infatti $u_1 \notin W$: $2-3-2 = -3 \neq 0$), NON è possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ t.c. $W = U \oplus L$.

ES 5

Dati due sottospazi vettoriali $U = \langle \overset{v_1}{(1,0,2,0)}, \overset{v_2}{(0,1,1,0)} \rangle$, $V = \langle \overset{v_3}{(3,4,4,0)}, \overset{v_4}{(0,0,1,1)}, \overset{v_5}{(0,1,2,2)} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$, si determinino delle basi dei sottospazi $U\cap V$, U, V e $U+V$.

Un vettore $w \in U\cap V$ si può scrivere nella forma seguente:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5. \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = 4\lambda_3 + \lambda_5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 4\lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 \\ 0 = \lambda_4 + 2\lambda_5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = 4\lambda_3 + \lambda_5 \\ 6\lambda_3 + \cancel{4\lambda_3} + \cancel{\lambda_5} = \cancel{4\lambda_3} + \lambda_4 + \cancel{2}\lambda_5 \\ \lambda_4 = -2\lambda_5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = 4\lambda_3 + \lambda_5 \\ \lambda_4 = 6\lambda_3 - \lambda_5 \\ 6\lambda_3 - \cancel{\lambda_5} = -\cancel{2}\lambda_5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_4 = 12\lambda_3 \\ \lambda_5 = -6\lambda_3 \end{cases}$$

Quindi lo spazio vettoriale $U\cap V$ ha dimensione 1 (c'è un'incognita λ_3 libera di variare). Ponendo $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_4 = 12, \lambda_5 = -6$. Ottengo il vettore

$$w = 3v_1 - 2v_2 = v_3 + 12v_4 - 6v_5 = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\\0\end{pmatrix}$$ che è una base di $U\cap V$.

Una base di U è data dai vettori v_1, v_2 poiché essi sono l.i.:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Una base di V è data dai vettori v_3, v_4, v_5 poiché essi sono l.i.:

$$\alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 4\alpha + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Per la formula di Grassmann: $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2+3-1=4$
Essendo $U+V$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, una base è la base canonica.

ES 6

Siano $U_t = \langle u_1, u_2 \rangle$, $V_t = \langle v_1, v_2 \rangle$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ con $u_1 = (1, t, 2t, 0)$, $u_2 = (t, t, t, t)$, $v_1 = (t-2, -t, -3t, t)$, $v_2 = (2, t, 2t, 0)$.

a) Si dica se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$;

b) Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) = 1$?

c) Si determini una base di $U_1 \cap V_1$ e la si estenda ad una base di $\mathbb{R}^4$.

a) $U_t + V_t = \langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$. Noto che $v_1 = u_2 - 2u_1 \Rightarrow u_1, u_2, v_1, v_2$ lin. dip.
$\Rightarrow$ non sono mai una base di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \nexists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$.

b) Poiché $v_1 = u_2 - 2u_1 \Rightarrow v_1 \in U_t \Rightarrow v_1 \in U_t \cap V_t \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \dim(U_t \cap V_t) \geq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Dato che $U_t \cap V_t \subseteq U_t$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) \leq \dim U_t \leq 2$
$U_t \cap V_t \subseteq V_t \qquad \leq \dim V_t \leq 2$

Osservo che $\dim(U_t \cap V_t) = 2 \Leftrightarrow U_t = V_t$ e $\dim U_t = \dim V_t = 2$.
Quindi cerco i valori di t per cui $U_t = V_t$ ($\Leftrightarrow v_1, v_2 \in U_t$)
$v_1 \in U_t$: già dim. $v_2 \in U_t \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $v_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha + \beta t, \alpha t + \beta t, 2\alpha t + \beta t, \beta t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha + \beta t \\ t = \alpha t + \beta t \\ 2t = 2\alpha t + \beta t \\ 0 = \beta t \end{cases}$$

se $t=0$: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2$. MA $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,0,0,0) \Rightarrow \dim U_0 = 1$.
$\dim(U_0 \cap V_0) = \dim U_0 = 1$ ✓

se $t \neq 0$: $\begin{cases} 2 = \alpha + \beta t \\ 1 = \alpha + \beta \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 0 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$ ↯ $\Rightarrow$ non si verifica mai $\dim(U_t \cap V_t) = 2$
$\Rightarrow \dim(U_t \cap V_t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

c) $t = 1$. Per quanto visto nel pto c) si ha $\dim(U_1 \cap V_1) = 1$. So che $v_1 \in U_1$, quindi $v_1 = (-1, -1, -3, 1)$ è una base di $U_1 \cap V_1$.
Per estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente aggiungere 3 vettori in modo tale che i 4 vettori ottenuti siano l.i. Prendo $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$
$\Rightarrow v_1, e_1, e_2, e_3$ sono l.i. $\Rightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

ES 7

Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$ e sia $v = (1,0,2,1) \in V$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (0,1,-1,-2)$.

(a) Si scriva una base di V che contenga il vettore v assegnato.

(b) Si calcoli la dimensione di $U+V$ e si dica se tale somma è diretta.

(c) Si calcoli la dimensione e una base di $U \cap V$.

(d) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con V. Se un tale sottospazio esiste, se ne determini una base, altrimenti si spieghi perché un tale W non può esistere.

(a) $v \in V$. Osservo che i vettori $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ e che $\dim V = 4-1 = 3$.

Verifico che v, v_1, e_2 sono l.i.:

$\alpha v + \beta v_1 + \gamma e_2 = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow v, v_1, e_2$ sono una base di V

(b) $U+V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim U+V \leq 4$. Poiché $u_1 \notin V$ $(1-2\cdot 0+3\cdot 1 = 4 \neq 0)$ e $\dim V = 3 \Rightarrow \dim U+V = 4 \Rightarrow U+V = \mathbb{R}^4$.

Per la formula di Grassmann: $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim U+V = 2+3-4 = 1$

$\Rightarrow U$ e V non sono in somma diretta.

(c) $\dim U \cap V = 1$. Prendo un generico vettore $u \in U \Rightarrow u = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ -\beta \\ \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$. $u \in V \iff \alpha - 2(-\beta) + 3(\alpha - 2\beta) = 0$

$5\alpha - 4\beta = 0 \rightsquigarrow 4\beta = 5\alpha$

Prendo $\alpha = 4$, $\quad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \in U \cap V \Rightarrow u$ è una base di $U \cap V$.

(d) Il sottospazio banale $\langle 0 \rangle$ ha le proprietà richieste: $U \cap \langle 0 \rangle = 0 = V \cap \langle 0 \rangle$.

Inoltre, $e_1 \notin V$ $(1-2\cdot 0 + 3 \cdot 0 \neq 0)$ e $e_1 \notin U$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ -\beta \\ \alpha-2\beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} ↯ \right)$

pertanto, anche il sottospazio $W = \langle e_1 \rangle$ è in somma diretta sia con U che con V ed una sua base è $\{e_1\}$.