TUTORATO 8

ES 1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il determinante mediante la formula di Laplace, sviluppando rispetto 3ª riga e poi rispetto 4ª colonna.
Calcolare inoltre $\det A$ mediante l'algoritmo di Eliminazione di Gauss

Rispetto alla terza riga:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\left[2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] = 2\left[4+0\right] = 8$$

Rispetto alla quarta colonna:

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+2(4+1) = 8$$

Mediante E.G.:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{IV}{=} \begin{array}{c} \\ - \\ \\ I-2IV \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{array}{c} \\ \\ III/2 \\ IV+5II \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-13III \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8.$$

ES 2

Calcolare il rango al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ di $A_t=\begin{pmatrix} 3 & t+6 & 0 & -5 \\ 0 & 3-2t & 3 & 1 \\ 2 & 7-t & -4 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Qual è la dimensione dello sp. vett. generato dalle colonne di A_t, al variare di t?

Considero ${}^TA_t$, perché $rk(A_t)=rk({}^TA_t)$

$${}^TA_t=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ t+6 & 3-2t & 7-t & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ -5 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$ faccio eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ t+6 & 3-2t & 7-t & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ -5 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ III \\ 5I+3IV \\ II \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ t+6 & 3-2t & 7-t & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ III-II \\ IV-2I \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ t & 3-2t & 3-t & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{array}{c} I/3 \\ II/3 \\ III/2 \\ IV-tI/3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-2t & 3-\frac{5}{3}t & 1-\frac{1}{3}t \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+(2t-3)II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7-\frac{13}{3}t & 2-t \end{pmatrix}$$

$t=2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/3 & 0 \end{pmatrix} \underset{IV+\frac{5}{3}III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk=3 \Rightarrow rk(A_t)=3$

$t\neq 2$: le 4 righe della matrice ${}^TA_t$ sono l.i. $\Rightarrow rk=4 \Rightarrow rk(A_t)=4$.

la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A_t è:

i) per $t=2$: la dimensione è 3.

ii) per $t\neq 2$: la dimensione è 4.

ES 3

Calcolare la seguente matrice di cambiamento di base mediante il metodo che utilizza E.G.:

$M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}_1}(id)$, dove $\mathcal{C}_1=\{v_1=(-1,0,-1), v_2=(-4,8,2), v_3=(1,-3,-1)\}$

$\mathcal{C}_2=\{v_1'=(0,1,-1), v_2'=(-1,1,0), v_3'=(6,-4,-1)\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}_1}(id)=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}_2}(id)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}_2}(id) \,\middle|\, M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{C}_1}(id) \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 6 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{II \\ -I \\ II+III+I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{I-II \\ II+6III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 40 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \underset{I-2III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 40 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}_1}(id) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -11 & 40 & -19 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

ES 4

In $\mathbb{R}^3$, sia $U=\langle(1,1,1)\rangle$, $W=\{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$. Scrivere la matrice associata alla proiezione $p_U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ proiezione su U lungo W, rispetto alla base canonica. Calcolare la somma $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_U)+M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_W)$ e spiegare perché viene quel risultato.

Per prima cosa, trovo una base di W:

$(x,y,z)\in W \Leftrightarrow x=-y-z$ 2 var. libere, $\dim W=2$.

$y=-1,\ z=0:\quad x=1 \qquad (1,-1,0)$ base di W

$y=0,\ z=-1:\quad x=1 \qquad (1,0,-1)$

Sia $\mathcal{B}=\{\overset{u}{(1,1,1)},\overset{w_1}{(1,-1,0)},\overset{w_2}{(1,0,-1)}\}$ base di $\mathbb{R}^3$, poiché $U\cap W=\langle 0\rangle$, infatti $\alpha\in\mathbb{R}:\ \alpha(1,1,1)\in W \iff \alpha+\alpha+\alpha=3\alpha=0 \iff \alpha=0$ e $\dim(U+W)=\dim U+\dim W=3$

Si ha $p_U(u)=u,\ p_U(w_1)=0=p_U(w_2) \Rightarrow M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(p_U)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_U)=M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(p_U)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id)=\left(M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id)\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&1&2&1&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1&1\\0&0&1&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&1/3&-2/3&1/3\\0&0&1&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right)$$

D'altra parte, si ha $p_W(u)=0,\ p_W(w_1)=w_1,\ p_W(w_2)=w_2. \Rightarrow M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(p_W)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_W)=M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(p_W)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(p_W)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_U)+M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(p_W)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\mathbb{1}_3.$$

Perché $U\oplus W=\mathbb{R}^3 \Rightarrow \forall v\in\mathbb{R}^3\ v=u+w \quad \exists!\,u\in U,\ \exists!\,w\in W$

si ha $p_U(u)=u,\ p_U(w)=0$ e $p_W(u)=0,\ p_W(w)=w$.

Pertanto $(p_U+p_W)(v)=p_U(v)+p_W(v)=p_U(u+w)+p_W(u+w)=p_U(u)+\cancel{p_U(w)}+\cancel{p_W(u)}+$ $+p_W(w)=p_U(u)+p_W(w)=u+w=v$.

$\Rightarrow (p_U+p_W):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ è l'applicazione identica, che ha come matrice associata rispetto alla base canonica l'identità $\mathbb{1}_3$.

ES 5

Siano $U = \langle u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,1,0,0) \rangle$ e $W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+z-w=0 \end{cases} \right\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Dopo aver verificato che $U \cap W = \{\vec{0}\}$ e $U+W = \mathbb{R}^4$, ossia che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$, determinare le matrici associate $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_U)$ e $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_W)$, dove $p_U : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $p_W : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sono le proiezioni su U lungo W e su W lungo U. Perché $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_U) + M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_W) = \mathbb{1}_4$?

Poiché $\alpha u_1 + \beta u_2 \in W$ $\left(\begin{cases} (\alpha+\beta)+\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\beta = 0 \end{cases} \right) \iff \alpha = 0 = \beta$, allora $U \cap W = \langle \vec{0} \rangle$. Inoltre, trovo una base di W:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+z-w=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x-2z \\ w = x+z \end{cases} \quad \text{2 var libere} \Rightarrow \dim W = 2$$

$x=1, z=0 \Rightarrow y=-2, w=1$ $\quad (1,-2,0,1) = w_1$

$x=0, z=1 \Rightarrow y=-2, w=1$ $\quad (0,-2,1,1) = w_2$

base di W.

Dalla formula di Grassmann: $\underbrace{\dim(U)+\dim(W)}_{=\dim(U+W)} = 4 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$. Si ha $p_U(u_1) = u_1$, $p_U(u_2) = u_2$, $p_U(w_1) = 0 = p_U(w_2)$.

$$\Rightarrow M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}(p_U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_U) = M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}(p_U)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_4}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_4}(id) = \left(M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{B}}(id) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\substack{-III+IV \\ III}}{\overset{I-II}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{II+2III}{\overset{I-3III}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ & = & & & & = & & \\ & = & & & & = & & \end{array} \right)$$

$$\underset{\sim}{\overset{I-2IV}{II+2IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_U) + M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_W) = \mathbb{1}_4$ (per la motivazione fine es 4, ma in $\mathbb{R}^4$)

$$\Rightarrow M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_W) = \mathbb{1}_4 - M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_4}(p_U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ES 6

Sia $A \in M_{m\times n}(K)$. 1) Perché se A ammette inversa destra, allora $m \le n$?

2) " " " " sinistra, " $m \ge n$?

3) A ammette inversa destra $\Leftrightarrow rk(A) = m$. (dim.)

5) A " " destra $\Leftrightarrow {}^T A$ ammette inversa sinistra. (dim).
In questo caso, come sono legate le inverse destre di A alle inverse sinistre di ${}^T A$?

4) A ammette inversa sinistra $\Leftrightarrow rk A = n$. (dim).

Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ammette inversa sn o dx e qualora esse esistano, determinarle tutte. Determinare tutte le inverse sinistre di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) A ammette inversa destra $\Rightarrow im A = K^m \Rightarrow rk A = m$.

Per la formula delle dimensioni, si ha: $\underbrace{\dim(K^n)}_{= n} = \underbrace{rk A}_{= m} + \underbrace{null A}_{\ge 0} \Rightarrow m \le n$.

2) A ammette inversa sinistra $\Rightarrow ker A = \{\vec{0}\} \Rightarrow null A = 0$.

Osservando che $im A \le K^m \Rightarrow rk A \le m$.

Per la formula delle dimensioni, si ha: $\underbrace{\dim(K^n)}_{= n} = rk A \le m \Rightarrow n \le m$.

3) "$\Leftarrow$" $rk(A) = m$. Poiché $im A \le K^m$,
allora $im A = K^m \Rightarrow A$ ammette inversa destra.

"$\Rightarrow$" Come nel punto 1): A ammette inversa destra $\Rightarrow im A = K^m \Rightarrow rk A = m$.

4) "$\Rightarrow$" Come nel punto 2): A ammette inversa sinistra $\Rightarrow ker A = \{\vec{0}\} \Rightarrow null A = 0$.
Per la formula delle dimensioni: $n = \dim(K^n) = rk A \Rightarrow rk A = n$.

"$\Leftarrow$" $rk A = n$. Applico la formula delle dimensioni:

$$\underset{n}{\dim(K^n)} = \underset{n}{\operatorname{rk} A} + \operatorname{null} A \Rightarrow \operatorname{null} A = 0 \Rightarrow \ker A = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$ A ammette inversa sinistra.

5) "$\Rightarrow$" A ammette inversa destra $\Rightarrow \exists P \in M_{n\times m}(K)$ t.c.

$A \cdot P = \mathbb{1}_m$. Traspongo questo prodotto: $\underbrace{{}^T(A\cdot P)}_{= {}^TP \cdot {}^TA} = {}^T\mathbb{1}_m = \mathbb{1}_m$

$Q := {}^TP \in M_{m\times n}(K)$: $Q \cdot {}^TA = \mathbb{1}_m \Rightarrow Q$ è inversa sinistra di ${}^TA$

$\Rightarrow {}^TA$ ammette inversa sinistra.

"$\Leftarrow$" Analogamente all'implicazione precedente:

${}^TA$ ammette inversa sinistra $\Rightarrow \exists Q \in M_{m\times n}(K)$ t.c. $Q \cdot {}^TA = \mathbb{1}_m$

Traspongo il prodotto: ${}^T(Q\cdot {}^TA) = {}^T\mathbb{1}_m = \mathbb{1}_m$

$\qquad {}^T({}^TA) \cdot {}^TQ = A \cdot {}^TQ$

$\Rightarrow P := {}^TQ \in M_{n\times m}(K)$ è inversa destra di A: $A \cdot P = \mathbb{1}_m$

$\Rightarrow$ A ammette inversa destra. Dalla dim. emerge che le inverse sinistre di ${}^TA$ sono le trasposte delle inverse destre di A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; i 3 vettori colonna sono lin. dip., poiché i primi due sono $=$.

$\Rightarrow \operatorname{rk} A \leq 2$.

Osservo che i vettori colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono l.i. $\Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$.

Poiché, in questo caso, $m=2$ e $n=3$, per il punto 2) si ha che A ammette inversa destra, mentre per il punto 4) si ha che A NON ammette inversa sinistra.

Determino, dunque, tutte le inverse destre di A: per farlo, applico EG al seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{I+II} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Definisco $A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1 \; x_2 \; x_3 \Rightarrow x_2$ var. libera

Ho ottenuto, dunque, 2 SEL $\left(A' \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(A' \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Il primo ha soluzioni $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = k_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 1 - k_1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = k_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - k_1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = k_1 \end{cases}$

Il secondo: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = k_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - k_2 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = k_2 \end{cases}$.

Quindi tutte le inverse destre di A sono date da $P = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 1-k_2 \\ k_1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Determino tutte le inverse sinistre di $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: per farlo, utilizzo il punto 5): le inverse sinistre di B sono le trasposte delle inverse destre di ${}^TB$.

Determino, dunque, tutte le inverse destre di ${}^TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; per farlo, applico EG al seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{II-I}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$x_1 \; x_2 \; x_3 \Rightarrow x_3$ variabile libera

Definisco $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ho ottenuto, dunque, 2 SEL $\left(B' \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2 \end{matrix}\right), \left(B' \middle| \begin{matrix} 0 \\ 1/2 \end{matrix}\right)$

Il primo ha soluzioni: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = k_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - k_1 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = k_1 \end{cases}$

Il secondo: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1/2 \\ x_3 = k_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -k_2 \\ x_2 = 1/2 \\ x_3 = k_2 \end{cases}$

Quindi, tutte le inverse destre di ${}^TB$ sono date da $P := \begin{pmatrix} 1-k_1 & -k_2 \\ -1/2 & 1/2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Pertanto, tutte le inverse sinistre di B sono date da

$Q := {}^TP = \begin{pmatrix} 1-k_1 & -1/2 & k_1 \\ -k_2 & 1/2 & k_2 \end{pmatrix}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.