TUTORATO 9

ES 1

Calcolare gli autovalori e autovettori delle seguenti matrici, se sono diagonalizzabili trovare una matrice di cambiamento di base P per cui $A = PDP^{-1}$ e D è diagonale

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{=A}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & k+1 \end{pmatrix} = A_k$, $k \in \mathbb{R}$ (per quale k è diagonalizzabile?) ; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_4) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$

$= (4-\lambda)[(4-\lambda)^2 - 4] - 2[2\cdot(4-\lambda) - 4] + 2[4 - 2(4-\lambda)] =$

$= (4-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12] + 4[\lambda - 2] + 4[\lambda - 2] = (4-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-2) + 8(\lambda-2) =$

$= (\lambda-2)[(4-\lambda)(\lambda-6) + 8] = (\lambda-2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 16) = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$.

$\lambda_1 = 2 : m_a(\lambda_1) = 2$ $\qquad$ $\lambda_2 = 8 : m_a(\lambda_2) = 1$.

· $\ker(A - 2\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $(x+y+z=0)$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 2 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 2 = m_a(\lambda_1)$.

· $\ker(A - 8\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\left(\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}\right)$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_2) = 1 = m_a(\lambda_2)$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$

b) $p_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda\mathbb{1}_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & k+1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(k+1-\lambda) + k = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k = (\lambda-k)(\lambda-1)$

<u>$k=1$</u>: $\lambda = 1$ unico autovalore, $m_a(\lambda) = 2$.

$\ker(A_1 - \mathbb{1}_2) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $(x-y=0) \Rightarrow \dim V_\lambda = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda) = 1 < m_a(\lambda) = 2 \Rightarrow A_1$ NON è diagonalizzabile

$\underline{k \neq 1}$: 2 autovalori distinti : $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = 1$.

· $\ker(A_k - k\mathbb{1}_2) = \ker\begin{pmatrix} -k & 1 \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \quad (kx - y = 0)$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1 = m_a(\lambda_1)$

· $\ker(A_k - \mathbb{1}_2) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -k & k \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (-x + y = 0)$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_2) = 1 = m_a(\lambda_2)$

$\Rightarrow A_k$ è diagonalizzabile. $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $A_k = P_k \overbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{D_k} P_k^{-1}$.

c) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\lambda_1 = 1$, $m_a(\lambda_1) = 2$ $\qquad$ $\lambda_2 = -1$, $m_a(\lambda_2) = 1$

· $\ker(A - \mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}\right)$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1 < m_a(\lambda_1) = 2$

$\Rightarrow A$ NON è diagonalizzabile.

ES 2

Determinare se il seguente endomorfismo è diagonalizzabile, ossia se esiste una base per cui la matrice associata è diagonale, nel caso determinare una tale base.
V spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3\}$. f endomorfismo t.c. $f(v_1) = v_1 + v_2$, $f(v_2) = v_1 + v_2 - 2v_3$, $f(v_3) = \frac{1}{2}v_2 + v_3$.

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\qquad$ $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1/2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1\right] - \left[(1-\lambda)\right] = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] = (1-\lambda)^3$

$\Rightarrow$ un unico autovalore $\lambda = 1$, $m_a(\lambda) = 3$.

$\ker(A - \mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}\right)$

$\Rightarrow \dim V_\lambda = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = 1 < 3 = m_a(\lambda) \Rightarrow$ l'endomorfismo f NON è diagonalizz.

ES 3

Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ e sia $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione lineare definita ponendo $f(X) = AX$, ove $X \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Scrivere la matrice F della funzione f, rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F è diagonalizzabile.

$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i,j = 1,2 \right\}$

base canonica $\mathcal{E}_{2\times2} = \left\{ \underset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$

a) $f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = E_1 - 2E_3 = (1, 0, -2, 0)_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ coord. di $f(E_1)$ nella base $\mathcal{E}_{2\times2}$

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = E_2 - 2E_4 = (0, 1, 0, -2)_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ " $f(E_2)$ "

$f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -3E_1 + 6E_3 = (-3, 0, 6, 0)_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ " $f(E_3)$ "

$f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -3E_2 + 6E_4 = (0, -3, 0, 6)_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ " $f(E_4)$ "

$$\Rightarrow F = M^{\mathcal{E}_{2\times2}}_{\mathcal{E}_{2\times2}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $\ker F = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}} \right\rangle \left(\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right)$

$\Rightarrow \operatorname{null} F = 2 \Rightarrow \operatorname{rk} F = 4 - 2 = 2$. Noto che i vettori colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}}$ sono l.i.

$\Rightarrow 3E_1 + E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}} \right)$, $3E_2 + E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}} \right)$

$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\ker f$

$E_1 - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \left(\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}} \right)$, $E_2 - 2E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \left(\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_{2\times2}} \right)$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\operatorname{im} f$

c) $p_\lambda(F) = \det(F - \lambda \mathbb{1}_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)(6-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda)\left[(1-\lambda)(6-\lambda) - 6\right] - 6\left[(1-\lambda)(6-\lambda) - 6\right] =$

$= (\lambda^2 - 7\lambda)^2 = = \lambda^2 (\lambda - 7)^2 \quad \Rightarrow$ 2 autovalori $\lambda_1 = 0, \ m_a(\lambda_1) = 2$
$\lambda_2 = 7, \ m_a(\lambda_2) = 2$

$\cdot \ker(F - 0\mathbb{1}_4) = \ker F = V_{\lambda_1} \Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 2 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 2 = m_a(\lambda_1)$

$\cdot \ker(F - 7\mathbb{1}_4) = \ker \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_2} = 2 \Rightarrow m_g(\lambda_2) = 2 = m_a(\lambda_2)$

$\Rightarrow F$ è diagonalizzabile.

$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow F = P \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$

ES 4

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è $A_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2-t & 3 & t \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A
b) Per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile? Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia diagonale.

a) $p_{A_t}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 2-t & 3-\lambda & t \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[-(5-\lambda)(1+\lambda) + 8\right] =$

$= (3-\lambda)\left[3 - 4\lambda + \lambda^2\right] = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3)^2$

2 autovalori: $\lambda_1 = 1, \ m_a(1) = 1 \qquad \lambda_2 = 3, \ m_a(3) = 2. \ \forall$ valore di $t \in \mathbb{R}$

b) $\cdot \ker(A_t - 3\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2-t & 0 & t \\ -4 & 0 & +2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{t = -2}$: $\ker(A_{-2} - 3\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim V = 2 \Rightarrow m_g(3) = 2 = m_a(3)$ $\quad (2x - z = 0)$

$\underline{t \neq -2}$: $\ker(A_t - 3\mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2+t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dim V_3 = 1 \Rightarrow m_g(3) = 1 < m_a(3) \overset{=2}{} \Rightarrow A_t$ NON è diagonalizzabile

$\cdot \ker(A_{-2} - \mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dim V_3 = 1 \Rightarrow m_g(3) = 1 = m_a(3)$

$\Rightarrow A_{-2}$ è diagonalizzabile. $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$

ES 5

Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1,0,1)=(4,2,4)$, il vettore $(1,0,-1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore 2, il vettore $(1,1,0)$ appartiene al nucleo di f.

a) Per quale valore di t il vettore $(t,1,-1)$ appartiene all'immagine di f?

b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

a) $(1,0,-1)$ generatore di $V_2 \Rightarrow f(1,0,-1) = 2\cdot(1,0,-1) = (2,0,-2)$.

$(1,1,0) \in \ker f \Rightarrow f(1,1,0) = (0,0,0)$

Osservo che $(2,0,-2)$ e $(4,2,4)$ sono due vettori di $\operatorname{im} f$ l.i. $\Rightarrow \operatorname{rk} f \geq 2$.

Inoltre, $(1,1,0) \in \ker f \Rightarrow \operatorname{null} f \geq 1$. Ora, $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \underset{\substack{\vee\!\!\mid \\ 2}}{\operatorname{rk} f} + \underset{\substack{\vee\!\!\mid \\ 1}}{\operatorname{null} f}$

$\Rightarrow \operatorname{rk} f = 2$ e $\operatorname{null} f = 1 \Rightarrow \{(2,0,-2),(4,2,4)\}$ base di $\operatorname{im} f$

$\{(1,1,0)\}$ base di $\ker f$.

$(t,1,-1) \in \operatorname{im} f \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta : (t,1,-1) = \alpha(2,0,-2) + \beta(4,2,4) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\alpha + 4\beta \\ 1 = 2\beta \\ -1 = -2\alpha + 4\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3+2 = 5 \\ \beta = 1/2 \\ \alpha = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \underline{t=5}$. $(5,1,-1) \in \operatorname{im} f$.

b) $e_1 = (1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,0,-1) \Rightarrow f(e_1) = \frac{1}{2}f(1,0,1) + \frac{1}{2}f(1,0,-1) = (2,1,2)+(1,0,-1)$
$= (3,1,1)$

$e_2 = (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) \Rightarrow f(e_2) = \cancel{f(1,1,0)} - \frac{1}{2}f(1,0,1) - \frac{1}{2}f(1,0,-1) = (-3,-1,-1)$

$e_3 = \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) \Rightarrow f(e_3) = \frac{1}{2}f(1,0,1) - \frac{1}{2}f(1,0,-1) = (2,1,2) - (1,0,-1) = (1,1,3)$

$\Rightarrow F = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)$.

c) $p_F(\lambda) = \det(F - \lambda \mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$

$= (3-\lambda)\left[-(1+\lambda)(3-\lambda)+1\right] - \left[-3(3-\lambda)+1\right] + \left[-3+(1+\lambda)\right] = (3-\lambda)(\lambda-1)^2 - 1 + (\lambda-2) =$

$= (\lambda-3)\left[-\lambda^2+2\lambda-\cancel{1}+\cancel{1}\right] = \lambda(\lambda-3)(2-\lambda)$

3 autovalori : $\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

$m_a(0)=1$. $\ker f = \langle(1,1,0)\rangle \Rightarrow m_g(0) = \text{null } f = 1 = m_a(0)$.

$m_a(2)=1 \Rightarrow m_g(2) \le m_a(2)=1$. $(1,0,-1)$ gen. di $V_2 \Rightarrow m_g(2)=1=m_a(2)$

$m_a(3)=1$.

$\cdot \ker(F-3\mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\begin{cases} x-y=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}\right.$

$\Rightarrow m_g(3)=1=m_a(3)$.

$\Rightarrow f$ è diagonalizzabile rispetto alla base di autovettori $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.