TUTORATO 10
ES 1

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1-3x_2+x_3-x_4=0$ e sia $U\subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1=(1,0,-1,1)$, $u_2=(2,1,0,1)$.

a) Determinare una base ortogonale di U.

b) Determinare una base di un sottospazio $W\subset U^\perp$ tale che $U\oplus W=V$.

c) Dato il vettore $v_t=(5,4,-3,t)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t=u+w$ con $u\in U$, $w\in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u, w.

a) $u_1\cdot u_2=(1\ 0\ -1\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=2+1=3\neq 0 \Rightarrow u_1, u_2$ non ortogonali. Cerco $\mathcal{B}=\{u_1', u_2'\}$ base di U che sia ortogonale: applico Gram-Schmidt a $\{u_1,u_2\}$

$u_1'=u_1$

$$u_2'=u_2-\underbrace{\frac{u_2\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1'}_{\text{proiezione ortogonale di } u_2 \text{ su } \langle u_1'\rangle}=(2,1,0,1)-\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}(1,0,-1,1)=(1,1,1,0)$$

$\mathcal{B}=\{u_1'=(1,0,-1,1),\ u_2'=(1,1,1,0)\}$ base ortogonale di U.

b) $U\oplus W=V \Leftrightarrow \begin{cases}V=U+W\\ U\cap W=\{\vec 0\}\end{cases}$. Devo trovare W tale che $\begin{cases}V=U+W\\ U\cap W=\{\vec0\}\\ W\subset U^\perp\end{cases}$. (*)

Osservo che $W\subset U^\perp$, poiché $U^\perp\cap U=\{\vec0\}$, $\Rightarrow W\cap U=\{\vec 0\}$.

Quindi (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}V=U+W\\ W\subset U^\perp\end{cases}$. Inoltre, per Grassmann, si ha $\dim W=\underset{\overset{\parallel}{3}}{\dim V}-\underset{\overset{\parallel}{2}}{\dim U}=1$.

($\dim V=3$ perché le equazioni che definiscono V sono $2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \Rightarrow$ 3 var. libere)

Pertanto, $W=\langle w_1\rangle$ deve soddisfare $\begin{cases}V=U+W\\ W\subset U^\perp\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}W\subset V\\ W\subset U^\perp\\ \dim W=1\end{cases}$

quindi, questo equivale a trovare w_1 tale che $\begin{cases}w_1\in V\\ w_1\cdot u_1=0\\ w_1\cdot u_2=0\end{cases}$

sia $w_1=(x_1,x_2,x_3,x_4)$: $\begin{cases}w_1\in V\\ w_1\cdot u_1=0\\ w_1\cdot u_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-x_4=0\\ x_1-x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_4=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}2&-3&1&-1\\1&0&-1&1\\2&1&0&1\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\2&1&0&1\\2&-3&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&2&1\\0&4&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&2&-1\\0&0&3&-2\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x_1-x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3-x_4=0\\ 3x_3-2x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}2x_1=-x_3\\ 2x_2=-x_3\\ 2x_4=3x_3\end{cases}$

1 variabile libera : $x_3=2 \Rightarrow (-1,-1,2,3)=w_1$

$\Rightarrow W=\langle(-1,-1,2,3)\rangle$

c) $v_t = u + w$ con $u \in U$, $w \in W \Leftrightarrow v_t \in U + W = U \oplus W = V$.

$v_t = (5,4,-3,t) \in V \Leftrightarrow 2\cdot 5 - 3\cdot 4 - 3 - t = 0 \Leftrightarrow \underset{\overset{\parallel}{-5}}{10-15} = t$

Ora, tale u è dato dalla proiezione di v_{-5} su U: $v_{-5} = (5,4,-3,-5)$

$$u = P_U(v_{-5}) = \frac{v_{-5}\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}\cdot u_1' + \frac{v_{-5}\cdot u_2'}{u_2'\cdot u_2'}\cdot u_2' = \frac{3}{3}u_1' + \frac{6}{3}u_2' = u_1' + 2u_2' = (3,2,1,1)$$

Mentre $w = v - u = (2,2,-4,-6)$.

ES 2

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2,0,1,-1)$, $u_2 = (1,1,0,3)$.

a) Trovare una base ortogonale di U.

b) Trovare una base di $U^\perp$.

a) $u_1 \cdot u_2 = 2 - 3 = -1 \neq 0$. Per trovare una base ortogonale di U applico GS alla base $\{u_1, u_2\}$:

$u_1' = u_1$

$$u_2' = u_2 - \frac{u_2\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1' = (1,1,0,3) - \frac{-1}{6}(2,0,1,-1) = \frac{1}{6}(8,6,1,17)$$

$B = \{u_1', u_2'\}$ è base ortogonale di U.

b) $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v\cdot u = 0 \ \forall u \in U\} = \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} v\cdot u_1 = 0 \\ v\cdot u_2 = 0\end{cases}\right\} =$

$$= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0\end{cases}\right\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0\end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = x_4 - 2x_1 \\ x_2 = -x_1 - 3x_4\end{cases} \Rightarrow \dim U^\perp = 2$$

$x_1 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -2, x_2 = -1$

$x_1 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1, x_2 = -3$

$\Rightarrow \begin{matrix}(1,-1,-2,0)\\(0,-3,1,1)\end{matrix}$ base di $U^\perp$.

ES 3

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1=(1,0,1,0)$, $u_2=(2,0,0,1)$, $u_3=(0,1,-1,1)$ e sia W il sottospazio generato dal vettore $w=(t,4,-2,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

a) Si dica per quali valori di t i sottospazi U e W non sono in somma diretta.

b) Dopo aver posto $t=3$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v di norma minima tale che $w+v\in U^\perp$.

c) Si determini una base ortogonale di U.

a) Determino le equazioni cartesiane di U: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3$

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1+2\alpha_2\\x_2=\alpha_3\\x_3=\alpha_1-\alpha_3\\x_4=\alpha_2+\alpha_3\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_3=x_2\\\alpha_1=x_2+x_3\\\alpha_2=x_4-x_2\\x_1=x_2+x_3+2x_4-2x_2\end{cases}$$

$x_1+x_2-x_3-2x_4=0$ equazioni cartesiane di U $(\dim U=3)$

U e W non sono in somma diretta se $U\cap W\neq\{\vec{0}\}$, cioè quando $\exists\alpha\neq0:\alpha w\in U$.

$\alpha w\in U\Leftrightarrow\alpha t+4\alpha+\cancel{2\alpha}-\cancel{2\alpha}=0\Leftrightarrow\alpha t=-4\alpha$.

se $t=-4\Rightarrow\alpha w\in U\ \forall\alpha\Rightarrow U$ e W non sono in somma diretta.

se $t\neq-4\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow U$ e W sono in somma diretta.

b) $t=3\Rightarrow w=(3,4,-2,1)$. $U^\perp=\{v\in\mathbb{R}^4 \mid u\cdot v=0\ \forall u\in U\}$, $\dim U^\perp=4-\underset{3}{\dim U}=1$.

Sia $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in U$, si ha $\underset{\substack{\downarrow\\(x_1,x_2,x_3,x_4)\text{ soddisfa le equazioni di }U}}{0}=x_1+x_2-x_3-2x_4=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow(1,1,-1,-2)\in U^\perp$

un qualsiasi vettore di U

$\overset{\dim U^\perp=1}{\Longrightarrow}U^\perp=\langle(1,1,-1,-2)\rangle$ $\quad\underset{u'}{(1,1,-1,-2)}$ base di $U^\perp$.

v di norma minima tale che $w+v\in U^\perp\Rightarrow w+v=P_{U^\perp}(w)$

$$P_{U^\perp}(w)=\frac{w\cdot u'}{u'\cdot u'}u'=\frac{3+4+\cancel{2}-\cancel{2}}{1+1+1+4}u'=u'=(1,1,-1,-2)$$

$\Rightarrow v=P_{U^\perp}(w)-w=u'-w=(1,1,-1,-2)-(3,4,-2,1)=(-2,-3,1,-3)$.

c) Applico GS alla base $\{u_1,u_2,u_3\}$:

$u_1'=u_1$; $\quad u_2'=u_2-\dfrac{u_2\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1'=u_2-\dfrac{2}{2}u_1'=u_2-u_1'=(1,0,-1,1)$

$$u_3'=u_3-\frac{u_3\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1'-\frac{u_3\cdot u_2'}{u_2'\cdot u_2'}u_2'=u_3-\frac{-1}{2}u_1'-\frac{2}{3}u_2'=u_3+\frac{1}{2}u_1'-\frac{2}{3}u_2'=$$
$=(-1/6,1,1/6,2/6)$