Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x+2)(x-3)$. Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f ? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

Esercizio 2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = B\,v$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & t \\ 2 & 0 & -2 \\ t & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui la matrice A_t ha un autovalore $= 0$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di A_t.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^T A_t\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t in modo che il vettore $v = (1, 2, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori di A e scrivere delle basi degli autospazi corrispondenti.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -2, 4)$ come somma $v = v1 + v2$, con $v1 \in U$ e $v2 \in U^{\perp}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + 3z + 2w = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base or-tonormale di U.

(c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 0, -2)$ sul sottospazio U.

Esercizio 7. Fornire un esempio di una matrice 2×2 non nulla che ha 0 come unico autovalore. Mostrare che ogni matrice quadrata N, di ordine 2, che ha 0 come unico autovalore è tale che N^2 è la matrice nulla.