TUTORATO 12

ES 1

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x+2)(x-3)$. Disponendo solo di questa informazione, è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f? In caso di risposta affermativa, quali sono queste dimensioni?

IPOTESI: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare, $p_f(x) = x(x+2)(x-3)$ TESI: null f, rk f.

$p_f(x) = x(x+2)(x-3) \Rightarrow x=0$ autovalore di f di $m_a(0) = 1$. $\Rightarrow 1 = m_a(0) \geq m_g(0) = \dim V_0$.

Ricordo che $V_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 0 \cdot v = 0\} \Rightarrow V_0 = \ker f$.

Dunque, poiché $m_g(0) \geq 1$, si ha $= m_g(0) = \dim V_0 = \dim \ker f = \text{null} f$.

Per la formula delle dimensioni $\text{rk} f = 3 - \text{null} f = 2$.

ES 2

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = Bv$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

IPOTESI: $AB = BA$, $Av = \lambda v$, $w = Bv$. TESI: $Aw = \lambda w$.

$Aw = ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$.

ES 3

Sia V uno spazio vettoriale, $U_1, \dots, U_r$ sottospazi vettoriali non nulli e distinti, tali che $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_r$. Mostrare che $\dim V \geq r$.

IPOTESI: V sp. vett., $U_1, \dots, U_r$ stsp $\neq 0$, distinti, $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_r$. TESI: $\dim V \geq r$.

Osservo che se esistono r vettori linearmente indipendenti in $V \Rightarrow \dim V \geq r$.

Uso le ipotesi per dimostrare che $\exists\, u_1, \dots, u_r \in V$ che sono l.i.

Poiché $U_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, u_1 \in U_1 \subseteq V$, $u_1 \neq \vec{0}$.

Poiché $U_1 \subsetneq U_2 \Rightarrow \exists\, u_2 \in U_2 \setminus U_1 \subseteq V$ e si ha $\{u_1, u_2\}$ l.i., infatti

se $a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{0} \Rightarrow u_2 = -\frac{a_1}{a_2} u_1 \in U_1$ $\lightning$.

Poiché $U_2 \subsetneq U_3 \Rightarrow \exists\, u_3 \in U_3 \setminus U_2 \subseteq V$ e si ha $\{u_1, u_2, u_3\}$ l.i., infatti

se $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{0} \Rightarrow u_3 = -\frac{a_1}{a_3} u_1 - \frac{a_2}{a_3} u_2 \in U_2$ $\lightning$

$\vdots$

Poiché $U_{r-1} \subsetneq U_r \Rightarrow \exists\, u_r \in U_r \setminus U_{r-1} \subseteq V$ e si ha $\{u_1, \dots, u_r\}$ l.i., infatti

se $a_1 u_1 + \dots + a_{r-1} u_{r-1} + a_r u_r = \vec{0} \Rightarrow u_r = -\frac{a_1}{a_r} u_1 - \dots - \frac{a_{r-1}}{a_r} u_r \in U_r$ $\lightning$

$\Rightarrow \exists \{u_1, \dots u_r\}$ l.i. e $\subseteq V \Rightarrow \dim V \geq r$.

ES 4

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare t.c. $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione nulla. Chi sono gli autovalori di una tale f?.

IPOTESI: $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$. TESI: $\forall v \in \mathbb{R}^n \ (f\circ f)(v) = \vec{0}$.

$(f\circ f)(v) = f(f(v)) = \vec{0}$ perché $f(v) \in \operatorname{im} f \subseteq \ker f \Rightarrow f(v) \in \ker f \Rightarrow f(f(v)) = \vec{0}$.

$\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f \iff \exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq \vec{0}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

Applico f a questa uguaglianza:

$$\underset{\text{TESI}}{\vec{0}} = (f\circ f)(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \overset{v \neq \vec{0}}{\Longrightarrow} \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

L'unico autovalore di un endomorfismo f t.c. $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$ è 0.

ES 5

Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette r ed s di equazioni

$$r: \begin{cases} 2y+z+1=0 \\ x+3y+z-1=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases}$$

a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

b) Si determini l'equazione parametrica della retta l parallela al vettore $v=(1,2,-1)$ e incidente le rette r e s. Si determinino inoltre le coordinate dei punti di incidenza di l con r e s.

c) Si determinino le equazioni parametriche delle 2 rette r_1 e r_2 contenute nel piano π (trovato al punto a)), parallele a r e distanti $\sqrt{210}$ da r.

a) Considero il fascio di piani per r: perché $\pi \supset r$, π sarà uno dei piani del fascio:

$\mathcal{F}: \alpha(2y+z+1)+\beta(x+3y+z-1)=0, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

$\pi // s \Rightarrow$ impongo che $\pi \cap s = \emptyset$.

$$\pi \cap s: \begin{cases} \alpha(2y+z+1)+\beta(x+3y+z-1)=0 \\ x+y-z+1=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta x+(2\alpha+3\beta)y+(\alpha+\beta)z = \beta-\alpha \\ x+y-z=-1 \\ y+2z=-2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 2\alpha+3\beta & \alpha+\beta & \beta-\alpha \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2\alpha+2\beta & \alpha+2\beta & 2\beta-\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3\alpha-2\beta & 3\alpha+6\beta \end{array}\right)$$

Il sistema non ammette soluzione sse $\begin{cases} -3\alpha-2\beta=0 \\ 3\alpha+6\beta \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{3}{2}\alpha \\ 3\alpha - 9\alpha \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{3}{2}\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$

Prendo $\alpha = 2$:

$\Rightarrow \pi: 2(2y+z+1)-3(x+3y+z-1)=0 \Rightarrow \pi: -3x-5y-z+5=0.$

b) L'equazione parametrica di una retta $\ell \parallel v$ è del tipo: $\ell : P + v$ $\quad P=\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \ell : \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + 2\lambda \\ z = z_P + 1\lambda \end{cases}.$$

Impongo che ℓ sia incidente ad r e s, cioè che i sistemi

$$\ell \cap r : \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + 2\lambda \\ z = z_P - \lambda \\ 2y+z+1=0 \\ x+3y+z+1=0 \end{cases}, \quad \ell \cap s : \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + 2\lambda \\ z = z_P - \lambda \\ x+y-z+1=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases}$$

ammettano soluzione.

$$\ell \cap r : \begin{cases} // \\ // \\ // \\ 2(y_P+2\lambda)+(z_P-\lambda)+1=0 \\ (x_P+\lambda)+3(y_P+2\lambda)+(z_P-\lambda)-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ // \\ // \\ 2y_P+z_P = -3\lambda-1 \\ x_P+3y_P+z_P = 1-6\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-2y_P-z_P-1}{3} \\ \lambda = \dfrac{-x_P-3y_P-z_P+1}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2y_P-z_P-1}{3} = \frac{-x_P-3y_P-z_P+1}{6} \Rightarrow x_P-y_P-z_P = 3$$

$$\ell \cap s : \begin{cases} // \\ // \\ // \\ (x_P+\lambda)+(y_P+2\lambda)-(z_P-\lambda)+1=0 \\ (y_P+\cancel{2\lambda})+2(z_P-\cancel{\lambda})+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ // \\ // \\ x_P+y_P-z_P = -1-4\lambda \\ y_P+2z_P = -2 \end{cases}$$

Quindi deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_P-y_P-z_P = 3 \\ x_P+y_P-z_P = -1-4\lambda \\ y_P+2z_P = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 3+z_P-2-2z_P \\ // \\ y_P = -2-2z_P \end{cases} \quad \begin{cases} x_P = 1-z_P \\ 1-z_P-2(1+z_P)-z_P = -1-4\lambda \\ y_P = -2-2z_P \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -4z_P-\cancel{1} = -\cancel{1}-4\lambda \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} x_P = 1-\lambda \\ z_P = \lambda \\ y_P = -2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -2(1+\lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}$$

che dipende da λ.
(è un punto generico di ℓ)

$$\Rightarrow \ell : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\ell \cap r : \lambda = \frac{-2(-2)-0-1}{3} = 1 \Rightarrow \ell \cap r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

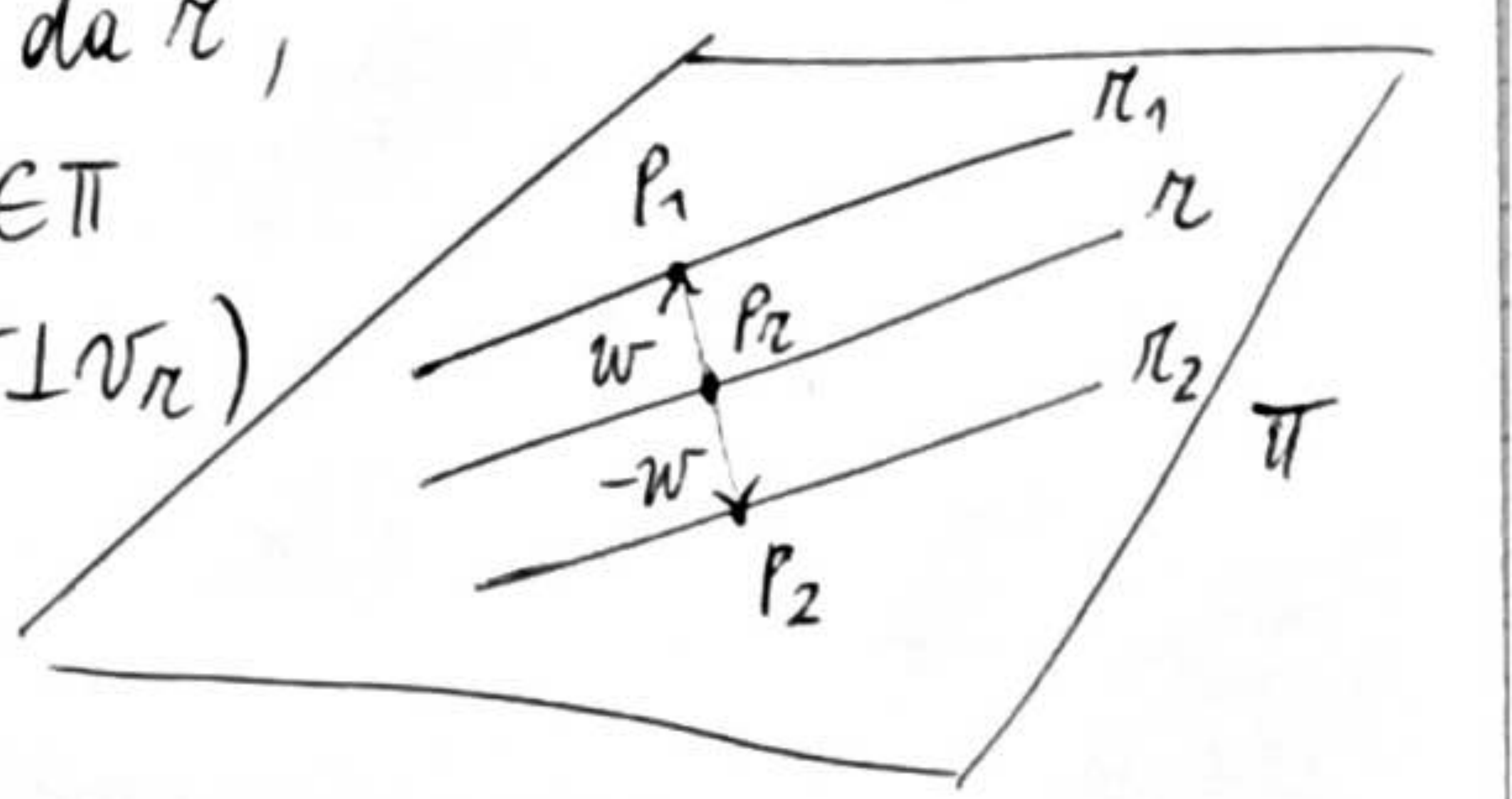
$$\ell \cap s : \lambda = -\frac{x_P+y_P-z_P+1}{4} = -\frac{\cancel{1}+(-2)-0+\cancel{1}}{4} = 0. \Rightarrow \ell \cap s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) $r_1, r_2 \parallel r$. r ha equaz. param.:

$$r : \begin{cases} 2y+z+1=0 \\ x+3y+z-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -2y-1 \\ x = -3y+2y+1+1 = -y+2 \end{cases} \xrightarrow{y=t} r : \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = -1-2t \end{cases}$$

$$r : \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{P_r =} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_r =} \Rightarrow r_1 : P_1 + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_2 : P_2 + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Determino P_1, P_2 : r_1, r_2 sono distanti $\sqrt{210}$ da r, quindi scrivo $P_1 = P_r + w$, $P_2 = P_r - w$ con $w \in \Pi$ (cioè $w \perp n_\pi$), $\|w\| = \sqrt{210}$, $w \perp r$ (cioè $w \perp v_r$)



$$n_\pi = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} w \perp n_\pi \\ w \perp v_r \end{matrix} \Rightarrow w = \alpha \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \alpha \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(oppure: $\begin{cases} w \cdot n_\pi = 0 \\ w \cdot v_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 5b - c = 0 \\ -a + b - 2c = 0 \end{cases}$ ... con $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$)

$\|w\| = \sqrt{210}$: $\|w\| = |\alpha| \sqrt{11^2 + 5^2 + 8^2} = |\alpha| \sqrt{121 + 25 + 64} = |\alpha| \sqrt{210} \Rightarrow |\alpha| = 1$

Scelgo $\alpha = 1 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

ES 6

Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il fascio di piani
$\mathcal{F}: x + (t-1)y + 2tz = t+1 \quad t \in \mathbb{R}$.

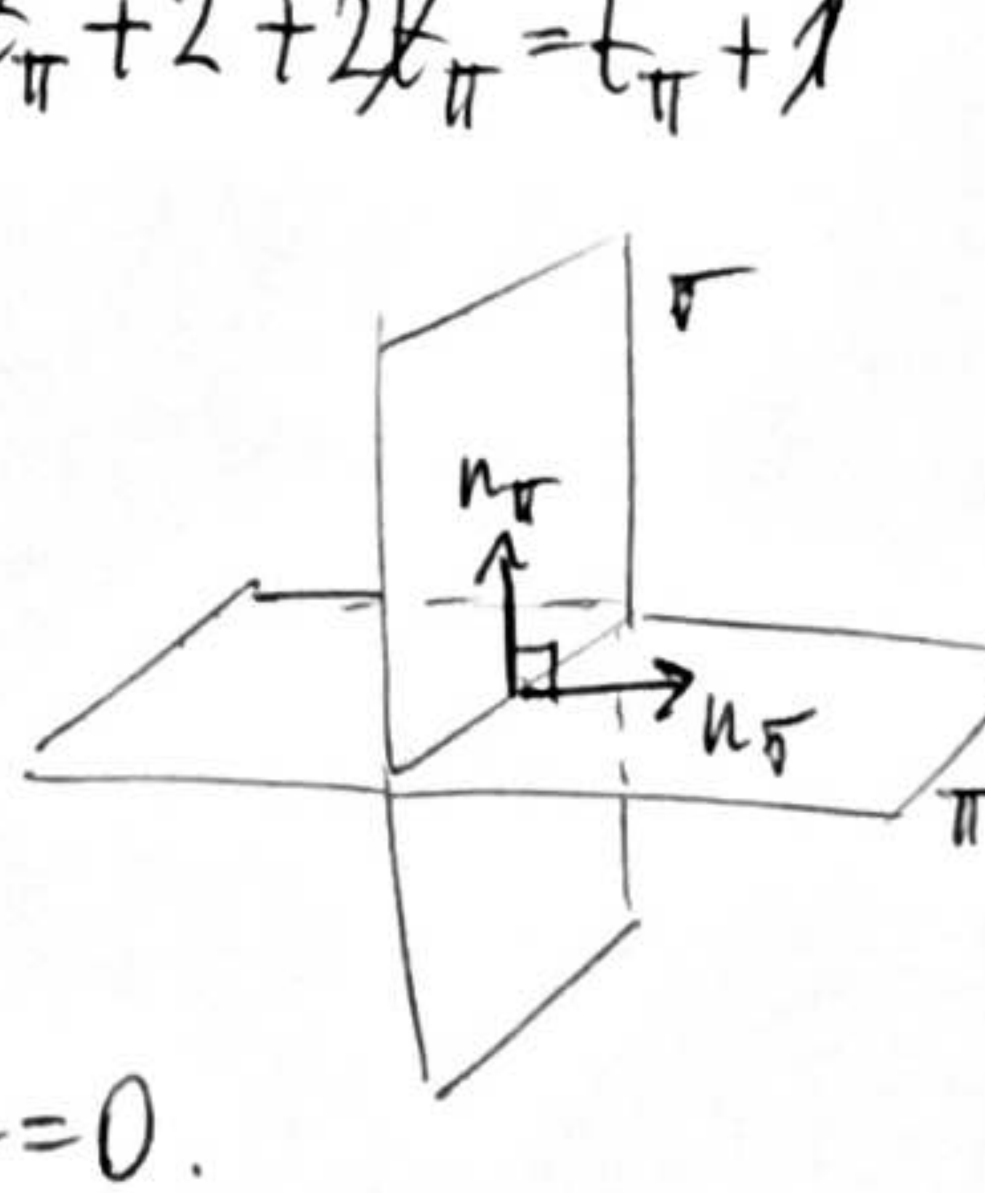
a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per $P = (1, -2, 1)$.

b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ del fascio $\mathcal{F}$ che forma un angolo retto con π.

c) Si determinino le equazioni parametriche dell'unica retta r che è contenuta in tutti i piani del fascio.

a) π ha eq. cart. del tipo $\pi: x + (t_\pi - 1)y + 2t_\pi z = t_\pi + 1 \quad t_\pi \in \mathbb{R}$. Impongo passaggio per P: $1 + (t_\pi - 1)(-2) + 2t_\pi 1 = t_\pi + 1 \Rightarrow \cancel{1} - \cancel{2t_\pi} + 2 + \cancel{2t_\pi} = t_\pi + \cancel{1}$
$\Rightarrow t_\pi = 2 \Rightarrow \pi: x + y + 4z = 3$.

b) σ forma angolo retto con $\pi \Rightarrow n_\sigma \perp n_\pi$.



σ è un piano di $\mathcal{F}$, quindi ha eq. cart. del tipo:
$\sigma: x + (t_\sigma - 1)y + 2t_\sigma z = t_\sigma + 1. \quad t_\sigma \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow n_\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ t_\sigma - 1 \\ 2t_\sigma \end{pmatrix} \qquad n_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$n_\pi \perp n_\sigma \Leftrightarrow n_\pi \cdot n_\sigma = 0 \Leftrightarrow \cancel{1} + t_\sigma - \cancel{1} + 8t_\sigma = 0 \Leftrightarrow t_\sigma = 0$.

$\Rightarrow \sigma: x - y = 1$.

c) Considero $s = \sigma \cap \pi$: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ z = \frac{1}{4}(3-(1+y)-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+y \\ z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y \end{cases}$

$s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{2}(1-\lambda) \end{cases}$. Verifico che $s \subset$ in ogni piano del fascio, cioè s soddisfa l'eq. di $\mathcal{F}$:

$$(1+\lambda)+(t-1)\lambda+\cancel{2}t\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1-\lambda) = t+1$$

$$\cancel{1}+\cancel{\lambda}+\cancel{t\lambda}-\cancel{\lambda}+\cancel{t}-\cancel{t\lambda} = \cancel{t}+\cancel{1} \quad \text{OK} \Rightarrow r = s.$$