TUTORATO 11

ES 1

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$$

a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f.

b) Trovare una base di $(\operatorname{im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{im} f)^\perp = \ker f$.

c) Dato $v=(12,1,1)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v+w \in \ker f$.

a) $\operatorname{im} f=\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$ spazio vettoriale generato dalle colonne di A.

Trovo una base di $\operatorname{im} f$:

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-9&3\\0&-6&2\end{pmatrix}\underset{2\mathrm{II}+3\mathrm{III}}{\overset{-\mathrm{II}/3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \text{ base di } \operatorname{im} f.$$

$v_1\cdot v_2=6+2=8\neq 0$. Applico GS a $\{v_1,v_2\}$:

$v_1'=v_1$

$$v_2'=v_2-\frac{v_2\cdot v_1'}{v_1'\cdot v_1'}v_1'=v_2-\frac{8}{1+4+4}v_1'=v_2-\frac{8}{9}v_1'=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8\\11\\7\end{pmatrix}$$

$\{v_1',v_2'\}$ base ortogonale di $\operatorname{im} f$.

b) $(\operatorname{im} f)^\perp=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid u\cdot v=0\ \forall v\in \operatorname{im} f\}=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{cases}u\cdot v_1=0\\u\cdot v_2=0\end{cases}\right\}$

$$u=(x_1,x_2,x_3)\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\3x_2-x_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=4x_2\\x_3=3x_2\end{cases}\quad x_2=1\Rightarrow(4,1,3) \text{ base di } (\operatorname{im} f)^\perp.$$

Per la formula delle dimensioni, $\dim(\ker f)=3-\dim(\operatorname{im} f)=3-2=1$.

Quindi, se $(4,1,3)\in\ker f\Rightarrow \ker f=\langle(4,1,3)\rangle=(\operatorname{im} f)^\perp$.

$$(4,1,3)\in\ker f\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-6\\8-5-3\\-8-1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ \checkmark$$

$\Rightarrow \ker f=(\operatorname{im} f)^\perp$.

c) $v+w = P_{\ker f}(v)$. $\ker f = (\mathrm{im} f)^\perp = \langle (4,1,3) \rangle$

$$\Rightarrow P_{\ker f}(v) = \frac{(12,1,1)\cdot(4,1,3)}{(4,1,3)\cdot(4,1,3)}(4,1,3) = \frac{48+1+3}{16+1+9}(4,1,3) =$$
$$= \frac{52}{26}(4,1,3) = 2(4,1,3) = (8,2,6).$$

$$\Rightarrow w = P_{\ker f}(v) - v = (8,2,6)-(12,1,1) = (-4,1,5).$$

ES 2

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2,-1,0,1)$, $u_2 = (1,3,-1,2)$.

a) Determinare una base ortogonale di U.

b) Determinare una base di $U^\perp$.

c) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (6,2,1,3)$ su U.

a) $u_1 \cdot u_2 = 2-3+2 = 1 \neq 0$. Applico GS alla base $\{u_1, u_2\}$ di U:

$u_1' = u_1$

$$u_2' = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1'}{u_1' \cdot u_1'} u_1' = u_2 - \frac{+1}{4+1+1} u_1' = u_2 - \frac{1}{6} u_1' =$$
$$= (1,3,-1,2) - \frac{1}{6}(2,-1,0,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{19}{6}, -1, \frac{11}{6}\right) = \frac{1}{6}(4,19,-6,11).$$

b) $U^\perp = \left\{ u' \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} u' \cdot u_1 = 0 \\ u' \cdot u_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = x_2 \\ x_1 + 6x_1 + 3x_4 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 + x_4 \\ x_3 = 7x_1 + 5x_4 \end{cases}$$

$x_1 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow (1,2,7,0)$

$x_1 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow (0,1,5,1)$ base di $U^\perp$.

c) $v = (6,2,1,3)$.

$$P_U(v) = \frac{v \cdot u_1'}{u_1' \cdot u_1'} u_1' + \frac{v \cdot u_2'}{u_2' \cdot u_2'} u_2' = \frac{(12-2+3)}{6} u_1' + \frac{\frac{1}{6}(24+38-6+33)}{\frac{1}{36}(16+19^2+36+121)} u_2' =$$
$$= \frac{13}{6} u_1' + 6 \cdot \frac{89}{534_6} u_2' = \frac{13}{6}(2,-1,0,1) + (4,19,-6,11)\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(30,6,-6,24) =$$
$$= (5,1,-1,4). = 2u_1 + u_2 \checkmark$$

ES 3

Sono dati i vettori $v_1=(0,2,1)$, $v_2=(1,1,-1)$, $v_3=(-1,1,0)$ e sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1)=-3v_1$, $f(v_2)=v_2$, $f(v_3)=v_3-2v_2$.

a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\{v_1,v_2,v_3\}$.

b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile.

d) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

a) $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$.

$f(v_1)=-3v_1=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$f(v_2)=v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=A$

$f(v_3)=v_3-2v_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

b) $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&-1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&1&0&0\\0&3&1&0&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&1&0&0\\0&0&1&-3/4&1/4&-1/2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&1&0&1/4&1/4&-1/2\\0&0&1&-3/4&1/4&-1/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/4&1/4&1/2\\0&1&0&1/4&1/4&-1/2\\0&0&1&-3/4&1/4&-1/2\end{array}\right)$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-2\\-3&1&-2\end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)=M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\,M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-2\\-3&1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&-3\\-6&1&-1\\-3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-2\\-3&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10&-2&4\\-2&-6&-12\\-10&-2&-8\end{pmatrix}$$

c) $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-3-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-2\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(3+\lambda)(1-\lambda)^2\Rightarrow$ 2 autovalori: $-3,1$

$m_a(-3)=1,\ m_a(1)=2$

$\ker(A-1I_3)=\ker\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right\rangle\quad\begin{cases}-4x=0\\-2z=0\end{cases}$

$V_1=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right\rangle=\langle v_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$. $m_g(1)=1<2=m_a(1)\Rightarrow f$ NON è diag.

$\ker(A+3\mathbb{1}_3)=\ker\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B\right\rangle \quad \begin{cases}-2y-2z=0\\-2z=0\end{cases}$

$V_{-3}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B\right\rangle=\langle v_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$. $m_g(-3)=1=m_a(-3)$.

d) $V_1\oplus V_{-3}\Leftrightarrow V_{+1}\cap V_{-3}=\{\vec{0}\}$. E' quest'ultima è soddisfatta, poiché v_1 e v_2 l.i.

ES 4

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio di U generato dai vettori $u_1=(2,2,0,1)$, $u_2=(0,1,1,0)$, $u_3=(1,0,-4,-1)$.

a) Dato il vettore $(3,-2,1,2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

b) Si determini una base ortogonale di U.

c) Sia $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v\in\mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

a) $v=(3,-2,1,2)$. poiché $U\oplus U^\perp=\mathbb{R}^4$ si ha $p_U+p_{U^\perp}=id.\Rightarrow v=p_U(v)+p_{U^\perp}(v)$.

$U^\perp=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases}2x_1+2x_2+x_4=0\\x_2+x_3=0\\x_1-4x_3-x_4=0\end{cases}\right\}$

$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_4=0\\x_2+x_3=0\\x_1-4x_3-x_4=0\end{cases}\quad \begin{cases}2x_1-2x_3+x_4=0\\x_2=-x_3\\x_1-4x_3-x_4=0\end{cases}\quad \begin{cases}4x_3-2x_3+x_4=0\rightsquigarrow x_4=-2x_3\\x_2=-x_3\\3x_1-6x_3=0\rightsquigarrow x_1=+2x_3\end{cases}$

$x_3=1\Rightarrow (2,-1,1,-2)=w'$ base di $U^\perp$.

$p_{U^\perp}(v)=\dfrac{v\cdot w'}{w'\cdot w'}w'=\dfrac{5}{10}w'=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)\Rightarrow p_U(v)=v-p_{U^\perp}(v)=\left(2,-\frac{3}{2},\frac{1}{2},3\right)$

b) ~~Applico~~ Applico GS a $\{u_1,u_2,u_3\}$

$u_1=u_1'$

$u_2'=u_2-\dfrac{u_2\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1'=u_2-\dfrac{2}{9}u_1'=\dfrac{1}{9}(-4,5,9,-2)$

$u_3'=u_3-\dfrac{u_3\cdot u_1'}{u_1'\cdot u_1'}u_1'-\dfrac{u_3\cdot u_2'}{u_2'\cdot u_2'}u_2'=u_3-\dfrac{1}{9}u_1'-\dfrac{\frac{1}{9}(-38)}{\frac{4}{81}(126)}u_2'=u_3-\frac{1}{9}u_1'+\frac{19}{7}u_2'=$

$=(1,0,-4,-1)+\frac{1}{9}\left[-(2,2,0,1)+\frac{19}{7}(-4,5,9,-2)\right]=(1,0,-4,-1)+\frac{1}{7}(-10,9,19,-5)=\frac{3}{7}(-1,3,-3,-4)$

c) $\forall v\in\mathbb{R}^4$, poiché $U\oplus U^\perp=\mathbb{R}^4$, $v=u+w$ con $u\in U$, $w\in U^\perp$.

$f(v)$ = proiezione ortogonale di v sul sottospazio $U\Rightarrow f(v)=f(u+w)=u$.

Pertanto, $f(v)=0\Leftrightarrow v\in U^\perp\Rightarrow \ker f=U^\perp$ e una sua base è data da w'.