Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (2, 2, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, -4, -1)$.

(a) Dato il vettore $v = (3, -2, 1, 2)$ si determini la sua proiezione ortogonale su U.

(b) Si determini una base ortonormale di U.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale $f(v)$ sul sottospazio U. Si determini una base del nucleo di f.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$.

(a) Dato il vettore $v_1 = (-1, 1, -2, 1) \in U$ trovare altri due vettori v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $v = (6, -7, -1, 3)$ trovare due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v = u + u'$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale $U : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Si noti che i vettori $u_1 = (1, 1, 1, -1)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ appartengono a U e sono ortogonali tra loro.

(a) Completare l'insieme di vettori $\{u_1, u_2\}$ in una base ortogonale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U, tale che $u_3 \cdot e_1 = 1$.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$, con $\dim W = 2$, tale che $U + W = \mathbb{R}^4$. Se ciò è possibile si trovi una base di W, in caso contrario si spieghi perché un tale W non può esistere.

(c) Dato il vettore $v = (5, -1, 3, 3)$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r e ortogonale alla retta s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P = (2, 1, 1)$ e parallelo alle rette s e t.

(c) Scrivere le equazioni parametriche di una retta parallela al piano di equazione $z = 0$ e incidente le rette r, s e t (ci sono due rette possibili, basta trovarne una).

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il piano $\pi : x + y - z + 1 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (1, 1, 0)$, parallela al piano π e incidente la retta r.