TEMA D'ESAME

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $(x+1)^2(x-2)$, è possibile stabilire se la matrice A è invertibile?

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che α è un autovalore di A. (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice $A - \alpha I$? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore α.)

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $u_1 = (1, 2, -2, 1)$, $u_2 = (2, 4, -2, 0)$, $u_3 = (1, 2, 1, -2)$ e il sottospazio W di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.

(b) Determinare la dimensione di W e trovare una sua base.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$, dove U è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3.

Esercizio 4. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.

(c) Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si è trovato lo stesso sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$? (*spiegare*).

Esercizio 5. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare i cui autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 3$ ha equazione $x + y - z = 0$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0$ è la retta di equazioni $x + z = 0$, $x - y = 0$.

(a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di f, e trovare una tale base.

(b) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2y - z = 10 \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.

(b) Determinare i punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia parallela al vettore $v = (1, 1, -3)$.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da r e s.