**Esercizio 1.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano  $U_1$ ,  $U_2$  sottospazi di V, con dim  $U_1 = 5$  e dim  $U_2 = 2$ . Dimostrare che dim $(U_1 \cap U_2) \ge 1$ . Deve necessariamente essere dim $(U_1 \cap U_2) = 1$ ?

**Esercizio 2.** È possibile che esista una funzione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  tale che Ker(f) = Im(f)? Perché? E se fosse  $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ , tale che Ker(f) = Im(f)?

**Esercizio 3** Sia  $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$ . Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

**Esercizio 4.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  sia Vil sottospazio generato dai vettori  $v_1 = (0, 3, -1, 2), v_2 = (1, 2, -2, 0)$  e  $v_3 = (2, 1, t, -2)$ .

- (a) Determinare la dimensione di V, al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Sia U il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  di equazione  $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$ . Si scriva una base di U.
- (c) Sia  $W \subset U$  il sottospazio generato dai vettori  $w_1 = (1, 1, 0, -1), w_2 = (-2, 0, 1, 1)$ . Si trovi una base di un sottospazio  $U' \subset \mathbb{R}^4$  tale che  $U = W \oplus U'$ .

**Esercizio 5.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  la funzione lineare data da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + tz, 2x + 4y - 4z, -x + ty + 2z)$$

- (a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e determinare il rango di f, al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Per il valore di t per cui il rango di f non è massimo, trovare una base di Ker(f) e una base di Im(f).
- (c) Per il valore di t trovato nel punto (b), determinare una base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  del dominio e una base  $\{w_1, w_2, w_3\}$  del codominio tali che la matrice di f rispetto a tali basi sia  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva il polinomio caratteristico di  $A_{(t)}$  e si determini per quali valori di t gli autovalori di  $A_{(t)}$  sono reali.
- (b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.
- (c) Si dica se è possibile trovare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  costituita da autovettori della matrice che si ottiene per t=-3.

**Esercizio 7.** Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano  $\pi$  di equazione 2x - 3y + z + 4 = 0 e i punti A = (-2, 0, 0) e B = (0, 0, -4).

- (a) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano  $\pi$  e ortogonale alla retta passante per A e B.
- (b) Dato il punto P = (1, 4, -2) determinare il punto sul piano  $\pi$  di minima distanza da P.