Le coordinate polari di un punto del piano di Argand-Gauss forniscono la rappresentazione trigonometrica del numero complesso che corrisponde a tale punto.

Diamo qualche definizione per fissare il linguaggio.

<u>Def</u>: $i = (0,1) \in \mathbb{C}$

Si verifica che $i^2 = i \cdot i = -1$ e che se $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, si ha $z = \underline{a} + i\underline{b}$, dove $\underline{a} = (a,0)$ e $\underline{b} = (b,0)$.

<u>Oss</u>: L'identificazione di $x \in \mathbb{R}$ con $\underline{x} = (x,0) \in \mathbb{C}$ immerge $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ in maniera tale che le operazioni di somma e di prodotto definite su $\mathbb{C}$ estendano le analoghe operazioni su $\mathbb{R}$.

(cioè $\underline{x} + \underline{y}$ è uguale a $(x+y, 0)$ e

$\underline{x} \cdot \underline{y}$ è uguale a $(x \cdot y, 0)$)

<u>Def</u>: Sia $z \in \mathbb{C}$, la rappresentazione

$z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si dirà rappresentazione algebrica di z e la rappresentazione

$z = \rho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ si dirà rappresentazione (o forma) trigonometrica di z.

Inoltre, se $z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$,

(i) a si denota $Re(z)$ e si dice parte reale di z

b si denota $Im(z)$ e si dice parte immaginaria di z

(ii) $\rho = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ si dice norma di z

e si denota $\|z\|$

ϑ si denota $Arg(z)$ e si dice argomento di z.

<u>Def</u>: Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$, allora si definisce

$\bar{z} = a - ib$, $\bar{z}$ si dice coniugato di z.

<u>Oss</u>: si verifica facilmente che $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$ e $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$. Inoltre si ha $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

<u>Prop</u>: Siano $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$

due numeri complessi, allora si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right)$$

Ossia

$$\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\| \quad \text{e}$$

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

Oss: Così come la somma tra numeri complessi ha un'espressione semplice usando la forma algebrica dei numeri complessi, la moltiplicazione tra numeri complessi ha un'espressione semplice usando la forma trigonometrica dei numeri complessi.

In particolare è semplice esprimere una qualsiasi potenza di un numero complesso usando la sua forma trigonometrica:

Prop: Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e sia $n \in \mathbb{Z}$.

Allora si ha

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\right).$$

Questa proposizione permette di calcolare le radici n-esime di un numero complesso (oltre che le potenze n-esime).

Def: $z \in \mathbb{C}$ si dice radice n-esima di $\alpha \in \mathbb{C}$ se $z^n = \alpha$.

Prop: Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e sia $n \in \mathbb{Z}$. Allora z ha esattamente n radici n-esime $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ date dalla seguente espressione: se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Oss: Un'altra formulazione della proposizione è

Prop: se $\alpha \neq 0$, allora il polinomio $X^n - \alpha$ ammette esattamente n radici distinte in $\mathbb{C}$.

È vero un risultato molto più generale:

Teorema (Teorema fondamentale dell'algebra):
Sia $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinomio a coefficienti complessi.
Allora $P(X)$ ammette almeno una radice complessa, ossia, esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $P(\alpha) = 0$.

Una formulazione equivalente è:

Teorema: Ogni polinomio a coefficienti complessi si decompone come prodotto di polinomi di primo grado.