Abbiamo visto la definizione di spazio vettoriale ed alcuni esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{R}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$.

Ora vediamo come, a partire da uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, si possano costruire ulteriori esempi di spazi vettoriali.

Vediamo la nozione di sottospazio di uno spazio vettoriale.

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale, un sottospazio U di V è un sottoinsieme nonvuoto $U \subset V$ tale che le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite su V, inducano su U una struttura di spazio vettoriale.

Ossia, la somma di due elementi in U sia ancora in U e il prodotto di un elemento di U per uno scalare sia ancora un elemento di U. E queste operazioni su U soddisfino agli assiomi di spazio vettoriale.

In pratica non è necessario fare tutta la verifica della validità degli assiomi di spazio vettoriale per U, poiché vale il seguente criterio.

<u>Prop</u>: (Criterio di sottospazio) Un sottoinsieme U di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V se e solo se

(i) $\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda u \in U$ (è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare)

(ii) $\forall u, v \in U, \ u + v \in U$ (è chiuso rispetto alla somma di vettori)

<u>dim</u>. Queste condizioni sono necessarie, poiché se U è un sottospazio di V, la somma ed il prodotto per uno scalare definiti in V devono indurre su U una struttura di sottospazio e quindi in particolare delle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare su U.

Queste condizioni risultano anche sufficienti dato che la verifica degli assiomi di spazio vettoriale di somma e prodotto per uno scalare su U è automatica dal fatto che la somma ed il prodotto per uno scalare in tutto V soddisfano gli assiomi di spazio vettoriale. $\square$

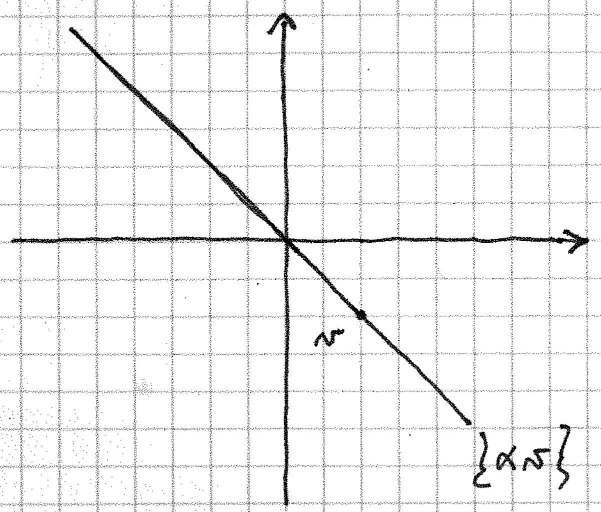
"U è un sottospazio di V" si indicherà con "$U \leq V$".

Esempi e controesempi:

1) ogni spazio vettoriale V ha come sottospazi V stesso ed il sottospazio banale $\{0_V\}$.

2) In $\mathbb{R}^2$, scelto un vettore $v = (a, b)$ non nullo, si ha il sottospazio $\{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha a, \alpha b) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

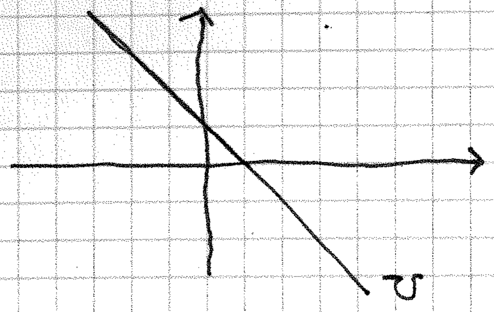
disegniamo ad esempio il caso $v = (1,-1)$



il sottospazio in questione è una retta per l'origine.

3) Sia $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1 \}$.

Vediamo che V non è un sottospazio dato che non contiene il vettore nullo $(0,0)$. (V non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per 0)



4) Sia $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1 \}$.

$(0,0) \in V$, ma ugualmente V non è un sottospazio, infatti, ad esempio $(1,0) \in V$ ma $2(1,0) = (2,0) \notin V$.

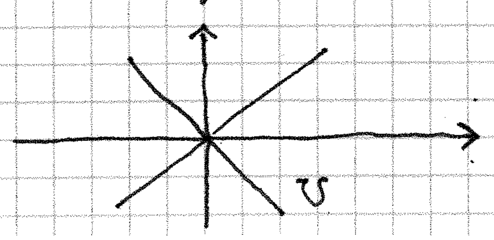
dunque per il criterio di sottospazio V non è un sottospazio.

5) Sia $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 0 \}$

Si ha $(0,0) \in V$. Inoltre V è chiuso per moltiplicazione per uno scalare qualsiasi: $(x,y) \in V \Rightarrow (\alpha x, \alpha y) \in V$.

però V non è chiuso rispetto alla somma:

$(1,-1) \in V$, $(1,1) \in V$, ma $(2,0) = (1,-1) + (1,1) \notin V$



Abbiamo visto vari esempi di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Tutti questi spazi vettoriali, ad eccezione dello spazio vettoriale banale, hanno infiniti elementi. Passiamo quindi a descrivere tutti questi elementi in termini finiti. La nozione fondamentale è quella di combinazione lineare.

<u>Def</u>: Dato un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale V, si dirà che un vettore $v \in V$ è <u>combinazione lineare</u> dei vettori $v_1, \dots, v_n$ se esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che si abbia

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = v$$

<u>Oss</u>: I numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si chiamano coefficienti della combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

<u>Esempio</u>: La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con coefficienti 2 e 3 infatti si ha $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Oss: Coefficienti diversi possono dare luogo a combinazioni lineari uguali, ossia che danno lo stesso vettore.

Esempio: $1(1,0) + 1(0,1) + 0(1,1) = (1,1)$

ma anche $0(1,0) + 0(0,1) + 1(1,1) = (1,1)$.

Oss: La combinazione lineare nulla dà il vettore nullo

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V.$$

Def: Un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale si dice finitamente generato se esiste un insieme finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ tale che ogni vettore di V sia combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

In tal caso i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono generatori di V.

Esempio: $\mathbb{R}^2$ è finitamente generato.

Un esempio di generatori è $(1,1), (1,-1)$.

Infatti $(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2)$

da cui si ottiene $\lambda_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{a-b}{2}$

quindi per ogni scelta di (a,b) si riescono a trovare dei coefficienti λ_1, λ_2 per cui la combinazione lineare di $(1,1)$ e $(1,-1)$ con coefficienti λ_1, λ_2 dia il vettore (a,b).

<u>Esercizio</u>: Verificare che $\mathbb{R}^n$ è finitamente generato ed esibire dei generatori di $\mathbb{R}^n$

<u>Esercizio</u>: Verificare che $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è finitamente generato ed esibire dei suoi generatori.

<u>Esercizio</u>: Verificare che $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ è finitamente generato ed esibire dei suoi generatori.

<u>Oss</u>: Uno spazio finitamente generato ha tanti possibili insiemi di generatori, e questi insiemi possono avere cardinalità diverse.

<u>Def</u>: Siano $u_1, \dots, u_k$ dei vettori di V, il sottospazio generato da $\{u_1, \dots, u_k\}$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $u_1, \dots, u_k$ e verrà denotato $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

Si verifica che $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ è un sottospazio usando il criterio del sottospazio.

<u>Oss</u>: $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ è il più piccolo sottospazio contenente $u_1, \dots, u_k$.

<u>Esercizio</u>: Trovare dei generatori del sottospazio delle matrici 2×2 simmetriche, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$

<u>Esercizio</u>: Trovare dei generatori del sottospazio delle matrici 2×2 antisimmetriche, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \right\}$

<u>Esercizio</u>: Trovare dei generatori del sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ dei polinomi palindromi, $\left\{ aX^3 + bX^2 + bX + a \right\}$.

Sia V uno spazio vettoriale, i sottospazi di V sono dei particolari sottoinsiemi di V. Sui sottoinsiemi di V sono definite le operazioni di unione e intersezione di sottoinsiemi di V.

Vediamo come si comporta la nozione di sottospazio relativamente a queste due operazioni.

<u>Prop</u>: Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), U e W due sottospazi di V. Allora l'insieme $U \cap W$ è un sottospazio di V.

<u>dim</u>. Usiamo il criterio di sottospazio.

Siano $v, v' \in U \cap W$, ossia $v, v' \in U$ e $v, v' \in W$.

Allora si ha $v + v' \in U$ e $v + v' \in W$ poiché U e W sono sottospazi. Dunque $v + v' \in U \cap W$, cioè $U \cap W$ è chiuso rispetto alla somma.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U \cap W$. Allora $\lambda v \in U$ e $\lambda v \in W$ poiché U e W sono sottospazi. Dunque $\lambda v \in U \cap W$, cioè $U \cap W$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Per il criterio di sottospazio $U \cap W$ è un sottospazio. □

Nel caso dell'unione, abbiamo visto che non sempre l'unione di due sottospazi è un sottospazio.

Un controesempio è dato da $U = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$W = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $U \cup W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 0\}$

Vediamo che l'unione di due sottospazi è un sottospazio solo in condizioni molto particolari.

<u>Prop</u>: Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V.

L'unione $U \cup W$ è un sottospazio solo se $U \subset W$ oppure $W \subset U$.

<u>dim</u>. Supponiamo che $U \not\subset W$ e $W \not\subset U$, e dimostriamo che $U \cup W$ non è un sottospazio.

Sia $u \in U - W$ un vettore di U ma non di W e $v \in W - U$ un vettore di W ma non di U, per ipotesi esistono.

Allora $u+v$ non è né un vettore di U né di W.

Infatti se $u+v$ stesse in U, allora, poiché $v = (v+u) + (-u)$, si avrebbe che anche v appartiene a U, contro le ipotesi, e similmente nel caso $u+v \in W$.

Dunque $u+v \notin U \cup W$, cioè $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio. $\square$