<u>Prop</u>: Sia $I = \{u_1, \dots, u_k\}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Se i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti esiste un sottoinsieme proprio di I di generatori di V.

<u>dim</u>. Poiché i vettori sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare non nulla di $u_1, \dots, u_k$ che dà il vettore nullo

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_V$$ e possiamo supporre $\lambda_1 \neq 0$.

Dunque si ha $$u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \frac{-\lambda_3}{\lambda_1} u_3 + \dots + \frac{-\lambda_k}{\lambda_1} u_k .$$

Poiché $u_1, \dots, u_k$ sono generatori si ha che un qualsiasi vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k$:

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k .$$

Ma allora si ha

$$v = \beta_1 \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \frac{-\lambda_3}{\lambda_1} u_3 + \dots + \frac{-\lambda_k}{\lambda_1} u_k \right) + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k$$

e dunque

$$v = \left(\beta_2 - \beta_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) u_2 + \left(\beta_3 - \beta_1 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) u_3 + \dots + \left(\beta_k - \beta_1 \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right) u_k$$

ossia v è combinazione lineare dei vettori $u_2, \dots, u_k$.

Poiché v era un generico vettore di V, si ha che $\{u_2, \dots, u_k\}$ è un insieme generatore di V. □

<u>Prop</u>: Sia $I = \{u_1, \dots, u_k\}$ un insieme generatore di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Se i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti, qualsiasi sottoinsieme proprio di I non genera V.

<u>dim</u>. Siano $u_1, \dots, u_k$ linearmente indipendenti, allora i vettori $u_2, \dots, u_k$ non generano tutto V. Infatti il vettore u_1 non è combinazione lineare dei vettori $u_2, \dots, u_k$.

Poiché se lo fosse si avrebbe $1 u_1 + 0 u_2 + \dots + 0 u_k = 0 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ da cui risulterebbe che i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. □

Quindi, da un insieme generatore è possibile estrarre un sottoinsieme proprio che sia ancora generatore se e solo se l'insieme generatore di partenza era costituito da vettori tra loro linearmente dipendenti.

<u>Prop</u>: Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Sia $u \in V$.

L'insieme $\{u, u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente se e solo se $u \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

<u>dim</u>. Se $u \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, allora si ha $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$.

Ma quindi si ha

$$1u + 0u_1 + \dots + 0u_k = 0u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

Dunque i vettori $u, u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti.

Viceversa, se i vettori $u, u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti si ha

$$\lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_V$$

con $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli.

Se $\lambda = 0$ si avrebbe una combinazione lineare non nulla dei vettori $u_1, \dots, u_k$ che dà il vettore nullo, contro l'ipotesi che $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti.

Dunque $\lambda \neq 0$.

Quindi si ha

$$u = \frac{-\lambda_1}{\lambda} u_1 + \frac{-\lambda_2}{\lambda} u_2 + \dots + \frac{-\lambda_k}{\lambda} u_k ,$$

cioè $\quad u \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. $\square$

Da queste proposizioni si vede che da ogni insieme finito di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è possibile togliere vettori fino ad arrivare ad una base, e ogni insieme finito di vettori linearmente indipendenti, se non è una base, è contenuto in un insieme di vettori [redacted] linearmente indipendenti più grande.

Ossia vale il seguente corollario.

<u>Corollario</u>: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e B un insieme finito di vettori di V. Allora le seguenti sono equivalenti:

(i) B è una base di V
(ii) B è un insieme generatore minimale
(iii) B è un insieme linearmente indipendente massimale.

<u>Teorema</u>: (Lemma dello scambio)

In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, sia $I = \{u_1, \dots, u_k\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e sia $G = \{w_1, \dots, w_p\}$ un insieme di generatori di V. Allora si ha $k \leq p$, ossia la cardinalità di un insieme generatore è sempre maggiore o uguale alla cardinalità di un insieme linearmente indipendente.

<u>dim</u>. Facciamo vedere che è possibile scambiare gli u_i con alcuni w_j in maniera tale che l'insieme ottenuto sia generatore.

Poiché G genera V si avrà

$$u_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p \quad \text{per opportuni } \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}.$$

Gli $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ non saranno tutti nulli dato che $u_1 \neq 0_V$.

Possiamo supporre $\alpha_1 \neq 0$

Ma allora i vettori $u_1, v_2, \ldots, v_p$ generano V.

Infatti, sia $v \in V$, si ha

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

ma, dato che $\alpha_1 \neq 0$, si ha

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} u_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \ldots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_1} v_p$$

e quindi

$$v = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} u_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \ldots + \left(\lambda_p - \lambda_1 \frac{\alpha_p}{\alpha_1}\right) v_p .$$

Poiché $u_1, v_2, \ldots, v_p$ generano V, si ha

$$u_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p \quad \text{per opportuni } \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$$

i numeri $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ non possono essere tutti nulli, altrimenti si avrebbe che u_1, u_2 sono linearmente dipendenti.

Possiamo supporre $\alpha_2 \neq 0$.

Ma allora i vettori $u_1, u_2, v_3, \ldots, v_p$ generano V.

Infatti, dato che $\alpha_2 \neq 0$, si ha

$$w_2 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} u_1 + \frac{1}{\alpha_2} u_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_2} w_3 + \dots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_2} w_p .$$

E quindi, dato che $u_1, w_2, \dots, w_p$ generano V, si ha, per $v \in V$,

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_p w_p =$$

$$= \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) u_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2} u_2 + \left(\lambda_3 - \lambda_2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) w_3 + \dots$$

$$+ \left(\lambda_p - \lambda_2 \frac{\alpha_p}{\alpha_2}\right) w_p$$

Cioè $\langle u_1, u_2, w_3, \dots, w_p \rangle = V$.

Continuando in questa maniera si può sostituire ogni volta un u_i al posto di un w_j in maniera tale che l'insieme rimanga generatore. Questo dimostra che $k \leq p$. □

<u>Corollario</u>: Ogni base (finita) di uno spazio vettoriale V ha la stessa cardinalità.

Def: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, la cardinalità di una base di V si dice dimensione di V.

Teorema: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio finitamente generato. Allora si ha

(i) ogni insieme linearmente indipendente si può completare ad una base di V

(ii) ogni insieme generatore contiene almeno una base di V.

dim. Sia G un insieme generatore finito di V. Abbiamo visto che è possibile togliere vettori da G fino a che non si ottenga una base di V. Dunque vale (ii).

Abbiamo anche visto che ad ogni insieme linearmente indipendente si può aggiungere un vettore nel caso l'insieme non sia generatore in maniera tale che i vettori siano ancora linearmente indipendenti. Questo processo deve terminare dato che un insieme di vettori linearmente indipendenti non può avere più elementi di un insieme generatore.

Questo dimostra (i). $\square$