<u>Oss</u>: Nell'esercizio precedente si aveva

$\dim V = 2$, $\dim W = 2$

$\dim V \cap W = 1$, $\dim V + W = 3$

dunque valeva l'uguaglianza $\dim V + \dim W = \dim V \cap W + \dim V + W$.

Vediamo che questa uguaglianza vale in generale.

<u>Teorema</u>: (Formula di Grassmann)

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e U e W due sottospazi di V.

Allora vale l'uguaglianza

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W$$

<u>dim.</u> Sia $\dim U \cap W = k$, $\dim U = r \geq k$, $\dim W = s \geq k$.

Facciamo vedere che $\dim U + W = r + s - k$.

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $U \cap W$.

Completiamola ad una base $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r\}$ di U e

ad una base $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ di W.

Poiché l'insieme $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s\}$

genera $U + W$, si avrà $\dim U + W = r + s - k$ se e solo se

tale insieme è una base di $U + W$,

ossia se e solo se $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s$

sono vettori linearmente indipendenti.

Dimostriamo che lo sono.

Sia

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_r u_r + \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_s w_s = 0_V$$

una combinazione lineare che dà il vettore nullo.

Allora si ha

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_r u_r = -\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s$$

dunque

$$-\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s \in U \cap W$$

Poiché $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di $U \cap W$, si ha

$$-\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k$$

per opportuni $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k \in \mathbb{R}$.

Segue che

$$\alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k + \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_k w_s = 0_V.$$

Dato che $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s$ sono linearmente indipendenti, si ha per forza

$$\alpha_1' = \dots = \alpha_k' = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_s = 0 .$$

Poiché $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_s = 0$, si ottiene

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_r u_r = 0_V .$$

Poiché i vettori $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r$ sono linearmente indipendenti, si deve avere

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_r = 0$$

Dunque l'unica combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s$ che dà il vettore nullo è la combinazione lineare nulla. Questo dimostra che essi sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $V+W$. $\square$

<u>Def</u>: Siano U, W due sottospazi di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V.
Si dice che la somma di U e W è diretta se $U \cap W = \{0_V\}$.
In tal caso la somma di U e W si scrive $U \oplus W$.

<u>Oss</u>: Siano U e W due sottospazi di V in somma diretta (ossia tali che $U \cap W = \{0_V\}$), allora si ha

$$\dim U \oplus W = \dim U + \dim W,$$

e una base di $U \oplus W$ si ottiene unendo una base di U e una base di W.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$.
Trovare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

<u>Svolgimento</u>: Dalla formula di Grassmann si deve avere

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim U + \dim W = 2 + \dim W$ poiché $(1,1,1,1), (1,-1,1,-1)$ sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim W = 2$.
Segue anche che se $\{w_1, w_2\}$ è una base di W, allora $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), w_1, w_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
Viceversa, presa una qualsiasi base di $\mathbb{R}^4$ ottenuta

completando una base $\{u_1, u_2\}$ di U : $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$, allora si avrà che $\{v_1, v_2\}$ è una base di uno spazio W tale $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Dunque per trovare una base di W è sufficiente completare $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Completiamo $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo due opportuni vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.

Si verifica che $(1,0,0,0) \notin \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$

Si verifica che $(0,1,0,0) \notin \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,0,0,0) \rangle$

Dunque $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Quindi $W = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$ è un sottospazio tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

__Oss__: Esistono infiniti sottospazi W tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$,

ad esempio, anche $\langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$ andava bene.

Per verificare se un vettore appartiene o meno a un sottospazio

è utile avere una descrizione del sottospazio tramite equazioni.

__Esercizio__: Dimostrare che il sottoinsieme $U = \{ (x,y,z) \mid x+2y+3z=0 \}$

di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio.

__Svolgimento__:

Siano (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) due vettori di U.

Verifichiamo che $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

appartiene ad U: si ha

$$(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) = (x_1+2y_1+3z_1) + (x_2+2y_2+3z_2)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Dunque U è chiuso per la somma.

Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) \in U$, allora si ha

$$\alpha x + 2(\alpha y) + 3(\alpha z) = \alpha (x+2y+3z) = \alpha \cdot 0 = 0$$

dunque U è chiuso per il prodotto per uno scalare.

Si conclude che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Oss: Lo stesso ragionamento porta alla conclusione che un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^n$ definito da un sistema di m equazioni lineari omogenee è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Oss: Alla stessa maniera, si può concludere che un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, definito da un sistema di m equazioni lineari omogenee nelle coordinate rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V, è un sottospazio di V.

Def: Un sottospazio U di uno spazio vettoriale V, si dice definito tramite equazioni cartesiane se è definito da un sistema di m equazioni lineari omogenee nelle coordinate rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

Esempio: In $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+2z-t=0 \ \text{ e } \ x+y+3z+2t=0 \}$$

è definito tramite il sistema

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x+y+3z+2t=0 \end{cases}$$

A volte si scrive

$$\mathcal{U}: \begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x+y+3z+2t=0 \end{cases}$$

per indicare che $\mathcal{U}$ è definito dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x+y+3z+2t=0 \end{cases}.$$

<u>Esempio</u>: In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{cases} x_{11}+3x_{21}-5x_{22}=0 \\ x_{11}-x_{12}+2x_{13}+x_{23}=0 \\ x_{13}+4x_{22}-x_{23}=0 \end{cases} \right\}$$

è definito tramite equazioni cartesiane dal sistema

$$\begin{cases} x_{11}+3x_{21}-5x_{22}=0 \\ x_{11}-x_{12}+2x_{13}+x_{23}=0 \\ x_{13}+4x_{22}-x_{23}=0 \end{cases}$$

N.B. Il sistema è nelle variabili $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ anche qualora non tutte le variabili comparissero nelle equazioni del sistema.

<u>Esempio</u>: In $\mathbb{R}^{\leq 4}[X]$,

$$\mathcal{U} = \left\{ a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0 \;\middle|\; \begin{cases} a_3+a_2+a_0=0 \\ a_3-a_1+2a_0=0 \\ a_2+a_4+a_0=0 \end{cases} \right\}$$

Anche se la variabile a_4 non compare nel sistema, il sistema

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_0 = 0 \\ a_3 - a_1 + 2a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

va pensato nelle variabili a_4, a_3, a_2, a_1, a_0.

<u>Esercizio</u>: in $\mathbb{R}^4$, sia U il sottospazio definito dalle equazioni

$$U : \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ x + y + 3z + 2t = 0 \end{cases}.$$

Trovare dei generatori di U.

<u>Svolgimento</u>: Risolviamo il sistema che definisce U.

Un metodo generale di risoluzione di sistemi lineari è quello di ridursi ad un sistema in forma a scala equivalente tramite operazioni elementari sulle equazioni del sistema.

Le operazioni elementari usate sono:

(i) moltiplicare un'equazione del sistema per uno scalare non nullo

(ii) riordinare le equazioni del sistema

(iii) sommare ad un'equazione del sistema un multiplo di un'equazione che sta più su di lei nel sistema.

Il sistema si dice in forma a scala se, per ogni equazione del sistema, la prima variabile che compare nell'equazione è più in là della prima variabile che compare nell'equazione precedente (Le variabili si suppongono ordinate rispetto ad un fissato ordine, per esempio x, y, z, t: x è la prima, y la seconda, ecc.)

Riduciamo il sistema ad un sistema equivalente in forma a scala usando le operazioni elementari:

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x+y+3z+2t=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ z+3t=0 \end{cases}$$

Il nuovo sistema è ottenuto dal vecchio sostituendo al posto della seconda equazione la seconda meno la prima.

Il nuovo sistema è in forma a scala perché la prima variabile che compare nella seconda equazione è la z, mentre nella prima equazione la prima variabile che compare è la x.

Risolviamo il nuovo sistema

Per risolvere un sistema in forma scala

(i) si esplicita la prima variabile che compare in un'equazione, per ogni equazione

(ii) si sostituisce il valore di una variabile esplicitata nelle equazioni precedenti

Si ottiene un'espressione delle variabili che compaiono come prima variabile in qualche equazione in termini delle variabili libere, ossia quelle che non compaiono come prima variabile in nessuna equazione.

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -y - 2z + t \\ z = -3t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -y + 7t \\ z = -3t \end{cases}$$

Dunque si ha

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{cases} x = -y + 7t \\ z = -3t \end{cases} \right\} = \left\{ (-y+7t, y, -3t, t) \right\}$$

$$= \left\{ (-y, y, 0, 0) + (7t, 0, -3t, t) \right\} = \langle (-1,1,0,0), (7,0,-3,1) \rangle$$

$\{ (-1,1,0,0), (7,0,-3,1) \}$ è una base di U.

$\dim U = 2$, ossia il numero delle variabili libere.