Esercizio: In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, trovare una base del sottospazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases} \right\}.$$

Svolgimento:

Ordiniamo le variabili $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ nell'ordine scritto.

Riduciamo il sistema in forma a scala.

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}$$

sostituendo alla seconda equazione, la seconda meno la prima si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ -x_{12} + 2x_{13} - 3x_{21} + 5x_{22} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto è in forma a scala, le variabili vincolate sono x_{11}, x_{12}, x_{13} (ossia quelle che compaiono come prime variabili in qualche equazione), le variabili libere sono x_{21}, x_{22}, x_{23} (quelle che non compaiono come prime variabili in nessuna equazione).

Risolviamo il sistema ridotto in forma a scala

$$\begin{cases} x_{11} = -3x_{21} + 5x_{22} \\ x_{12} = 2x_{13} - 3x_{21} + 5x_{22} + x_{23} \\ x_{13} = -4x_{22} + x_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = -3x_{21} + 5x_{22} \\ x_{12} = -3x_{21} - 3x_{22} + 3x_{23} \\ x_{13} = \qquad\qquad -4x_{22} + x_{23} \end{cases}$$

Poiché le variabili libere sono 3: x_{21}, x_{22}, x_{23}

si ha $\dim U = 3$; una base di U si ottiene fissando i valori delle variabili libere in tre modi indipendenti, ad esempio $(x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

A questi modi indipendenti di fissare (x_{21}, x_{22}, x_{23}) corrispondono le matrici

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste tre matrici costituiscono una base di U.

Abbiamo visto due modi di definire un sottospazio di uno spazio vettoriale:

(i) dando dei generatori

(ii) tramite equazioni cartesiane

Abbiamo visto come trovare una base di un sottospazio a partire da un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio (risolvendo il sistema).

Vediamo come, a partire da dei generatori del sottospazio, si trovano delle equazioni cartesiane del sottospazio (di nuovo risolvendo un sistema lineare).

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \langle (1,2,-1,0), (2,-1,0,-1) \rangle$.
Trovare delle equazioni cartesiane per U (ossia trovare un sistema di equazioni lineari omogenee tale che U sia l'insieme di tutte le sue soluzioni).

<u>Svolgimento</u>: Consideriamo la generica equazione lineare omogenea nelle variabili x, y, z, t:

$$ax + by + cz + dt = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo che questa equazione sia soddisfatta dai vettori in V. L'equazione sarà soddisfatta da tutti i vettori in V se e solo se è soddisfatta da un insieme generatore di V.

Si ottengono le seguenti condizioni su a, b, c, d:

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a - b - d = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema riducendolo in forma a scala si ottiene

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -5b + 2c - d = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2b + c \\ b = \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5}c + \frac{2}{5}d \\ b = \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d \end{cases}$$

da cui, per $c=1, d=0$ ottengo $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)$ e per $c=0, d=1$ ottengo $(a, b, c, d) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1\right)$

Si conclude che $V: \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + z = 0 \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + t = 0 \end{cases}.$

<u>Oss</u>: Sia V uno spazio vettoriale, U un sottospazio di V e $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U. Applicando il metodo dell'ultimo esercizio troviamo $n-k$ equazioni ($n = \dim V$) che sono soddisfatte dai vettori di U. Ma si vede anche che lo spazio delle soluzioni di tale sistema lineare ha dimensione $n-(n-k) = k$. Dunque lo spazio delle soluzioni di tale sistema coincide con il sottospazio U.

Le operazioni elementari possono essere usate anche per ottenere una base di un sottospazio a partire da un insieme generatore del sottospazio.

<u>Prop</u>: Sia $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ un sottospazio di uno spazio vettoriale V, generato dai vettori $u_1, \dots, u_k$. Allora

(i) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha u_1, u_2, \dots, u_k$ è un insieme di generatori di U.

(ii) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 + \alpha u_2, u_2, \dots, u_k$ è un insieme di generatori di U.

dim. Chiaramente $\langle \alpha u_1, u_2, \dots, u_k \rangle \subset U$, ma si ha anche

$u_1 \in \langle \alpha u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$, dunque $U \subset \langle \alpha u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$.

Si ha cioè $\langle \alpha u_1, u_2, \dots, u_k \rangle = U$.

Analogamente, si ha $\langle u_1 + \alpha u_2, u_2, \dots, u_k \rangle \subset U$.

Ma si ha anche $u_1 = (u_1 + \alpha u_2) + (-\alpha) u_2$, dunque

$u_1 \in \langle u_1 + \alpha u_2, u_2, \dots, u_k \rangle$. Da ciò segue che si ha

$\langle u_1 + \alpha u_2, u_2, \dots, u_k \rangle = U$. $\square$

Da questa proposizione si vede che le operazioni elementari eseguite su un insieme generatore di un sottospazio danno un altro insieme generatore del sottospazio.

È possibile dunque applicare le operazioni elementari ai generatori di un sottospazio al fine di ottenere un insieme generatore più "semplice" da cui estrarre una base sia automatico.