Foglio di esercizi 4

Esercizio 1 In $\mathbb{R}^5$, trovare una base del sottospazio W definito da

$$W =< (1,0,1,0,1), (2,-1,1,1,-1), (0,-1,-1,1,-3), (0,1,-1,2,3), (2,-3,3,-3,-7) > .$$

Trovare un sottospazio $W^{'}$ tale che $W \oplus W^{'} = \mathbb{R}^5$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^6$, trovare una base del sottospazio U definito da

$$U = \{(x,y,z,u,v,w) \in \mathbb{R}^6 \ \mid \ \begin{cases} x+y-z-u+v+w=0 \\ 2x+y-z-2u+2w=0 \\ x+2z-u-v+w=0 \\ 3x+y+3z-3u+v+w=0 \end{cases} \}.$$

Completare tale base ad una base di $\mathbb{R}^6$.

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$, trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio

$$V =< (1,2,1,0), (1,1,2,1), (-1,1,-4,-3) > .$$

Calcolare $\dim V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \leq V^{'}$ e $\dim V^{'} = \dim V + 1$; determinare delle equazioni caresiane di $V^{'}$.

Esercizio 4 In $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, trovare una base del sottospazio W definito da

$$W =< \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > .$$

Trovare un sottospazio $W^{'}$ tale che $W \oplus W^{'} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, trovare una base del sottospazio U definito da

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \ \mid \ \begin{cases} -a_{11} - a_{12} + a_{13} + 2a_{21} + a_{23} = 0 \\ -3a_{11} + a_{12} + a_{13} + 3a_{21} + a_{22} + 3a_{23} = 0 \\ a_{11} - a_{12} - a_{13} + a_{21} - a_{22} - a_{23} = 0 \\ 2a_{11} - 2a_{13} - a_{21} - a_{22} - 2a_{23} = 0 \end{cases} \}.$$

Completare tale base ad una base di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6 In $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio

$$V =< \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > .$$

Calcolare $\dim V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $V \leq V^{'}$ e $\dim V^{'} = \dim V + 1$; determinare delle equazioni caresiane di $V^{'}$.

Esercizio 7 In $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, trovare delle equazioni cartesiane nelle variabili a, b, c, d che siano verificate se e solo se il polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ appartiene al sottospazio

$$V =< -x^3 + 4x^2 + x + 3, x^3 + 2x^2 + x + 1, 2x^3 + x^2 + x > .$$

Calcolare $\dim V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ tale che $V \leq V^{'}$ e $\dim V^{'} = \dim V + 1$. Determinare delle equazioni lineari omogenee nelle variabili a, b, c, d che definiscano $V^{'}$.

Esercizio 8 In $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, trovare una base del sottospazio U definito da

$$U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \ \mid \ \begin{cases} a - b + c + d = 0 \\ a + 3b + c + 3d = 0 \\ 2a + 2b + 2c + 4d = 0 \end{cases} \}.$$

Completare tale base ad una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

Esercizio 9 In $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, trovare una base del sottospazio W definito da

$$W =< -x^3 - x^2 + x, 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2, x^3 + 1, x^3 - x^2 + x + 2, x^3 - x^2 - 2x > .$$

Trovare un sottospazio $W^{'}$ tale che $W \oplus W^{'} = \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

Esercizio 10 Risolvere gli esercizi del Prof. Candilera reperibili all'indirizzo

http://www.math.unipd.it/ candiler/didafiles/inge/falg-es1.pdf

Esercizio 11 Risolvere gli esercizi sugli spazi vettoriali dei compiti d'esame degli anni precedenti reperibili nella pagina web del Prof. Candilera all'indirizzo

http://www.math.unipd.it/ candiler/falg.html

da cui è possibile accedere anche alle pagine web dei Proff. Cantarini, Fiorot, Garuti contenenti raccolte di esercizi e temi d'esame degli anni passati.