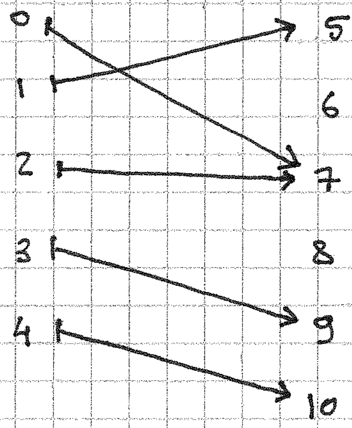
Siano A e B due insiemi, un'applicazione da A a B, denotata $A \to B$, è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B.

<u>Esempio</u>: $A = \{0,1,2,3,4\}$, $B = \{5,6,7,8,9,10\}$

Sia $\phi : A \to B$ la seguente applicazione



$\phi(0) = 7$, $\phi(1) = 5$, $\phi(2) = 7$, $\phi(3) = 9$, $\phi(4) = 10$

<u>Def</u>: Una applicazione si dice iniettiva se manda elementi diversi dell'insieme di partenza, detto dominio, in elementi diversi dell'insieme di arrivo, detto codominio.

<u>Esempio</u>: (i) L'applicazione ϕ definita nell'esempio precedente non è iniettiva poiché $\phi(0) = \phi(2) = 7$.

(ii) L'applicazione ϕ' ottenuta da ϕ restringendo il dominio all'insieme $\{1,2,3,4\}$ è iniettiva poiché $\phi(1) = 5$, $\phi(2) = 7$, $\phi(3) = 9$, $\phi(4) = 10$.

<u>Def</u>: Un' applicazione $\phi : A \to B$ si dice suriettiva se

$\forall b \in B, \exists a \in A$ t.c. $\phi(a) = b$. Si dice che b è immagine di a tramite ϕ.

<u>Esempio</u>: L'applicazione ϕ definita al primo esempio non è suriettiva poiché 6 non è immagine di alcun elemento del dominio.

<u>Def</u>: Sia $\phi : A \to B$ un' applicazione, sia $A' \subset A$, allora si definisce il sottoinsieme $\phi(A')$ di B, detto immagine di A' tramite ϕ, nel seguente modo

$$\phi(A') = \{ b \in B \mid \exists a \in A' \text{ t.c. } \phi(a) = b \}$$

<u>Esempio</u>: Sia $\phi : A \to B$ l'applicazione definita nel primo esempio, allora si ha $\phi(\{0,2,4\}) = \{7,10\}$

<u>Def</u>: Sia $\phi : A \to B$ un' applicazione, l'immagine di ϕ è il sottoinsieme $\phi(A)$ di B.

<u>Prop</u>: Sia $\phi : A \to B$ un' applicazione, allora ϕ è suriettiva se e solo se $\phi(A) = B$.

<u>dim</u>. Per definizione di applicazione suriettiva. □

Def: Sia $\phi: A \to B$ un'applicazione, sia $B' \subset B$, allora si definisce l'antimmagine (o immagine inversa o controimmagine) di B' tramite ϕ il sottoinsieme di A seguente

$$\phi^{-1}(B') = \{ a \in A \mid \phi(a) \in B' \}$$

Esempio: Sia $\phi: A \to B$ l'applicazione definita nel primo esempio, allora $\phi^{-1}(\{7,8,10\}) = \{0,2,4\}$.

Prop: Sia $\phi: A \to B$ un'applicazione, allora ϕ è iniettiva se e solo se $\forall b \in \phi(A)$, $\phi^{-1}(\{b\})$ contiene un solo elemento.

dim. Per definizione di applicazione iniettiva. □

Passiamo ora a studiare le applicazioni tra spazi vettoriali. Le applicazioni più interessanti tra spazi vettoriali sono le applicazioni che conservano la somma tra vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare. Tali applicazioni sono dette lineari.

Def: Sia $\phi: V \to W$ un'applicazione tra due spazi vettoriali V e W. L'applicazione ϕ si dice lineare se:

(i) $\forall v_1, v_2 \in V$, $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$

(ii) $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\phi(\alpha v) = \alpha \phi(v)$.

<u>Oss</u>: Se $\phi: V \to W$ è un'applicazione lineare, allora in particolare

(i) $\phi(0_V) = 0_W$

(ii) $\phi(-v) = -\phi(v)$

I sottoinsiemi più interessanti di uno spazio vettoriale sono i sottospazi vettoriali di tale spazio. Studiamo l'immagine di un sottospazio del dominio e la controimmagine di un sottospazio del codominio.

<u>Prop</u>: Sia $\phi: V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Sia V' un sottospazio di V, allora $\phi(V')$ è un sottospazio di W.

<u>dim</u>. Siano $w_1, w_2 \in \phi(V')$, esistono $v_1, v_2 \in V'$ tali che $\phi(v_1) = w_1$ e $\phi(v_2) = w_2$. Dunque, per la linearità di ϕ si ha $\phi(v_1+v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = w_1 + w_2$. Segue che $w_1 + w_2 \in \phi(V')$, poiché $v_1 + v_2 \in V'$. Analogamente, se $w \in \phi(V')$, esiste $v \in V'$ tale che $\phi(v) = w$. Dunque $\alpha w = \alpha\, \phi(v) = \phi(\alpha v) \in \phi(V')$.

Per il criterio di sottospazio si conclude che $\phi(V')$ è un sottospazio di W. $\square$

Prop: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Sia W' un sottospazio di W, allora $\phi^{-1}(W')$ è un sottospazio di V.

dim. Siano $v_1, v_2 \in \phi^{-1}(W')$, si ha

$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \in W'$. Dunque $v_1 + v_2 \in \phi^{-1}(W')$.

Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in \phi^{-1}(W')$, si ha $\phi(\alpha v) = \alpha \phi(v) \in W'$.

Dunque $\alpha v \in \phi^{-1}(W')$. Per il criterio di sottospazio si conclude che $\phi^{-1}(W')$ è un sottospazio di V.

Esempi: (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia definita da $f(x) = 2x + 1$.

L'applicazione f non è lineare (ad es. $f(0) = 1$).

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia definita da $f(x, y) = (x + 3y, -y)$

è lineare poiché le coordinate del vettore $f(x, y)$ sono espressioni lineari omogenee delle coordinate del vettore (x, y).

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, non è lineare.

Infatti in generale non si ha $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 + \sin x_2$

(iv) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $(x, y, z, w) \mapsto x - y + 2z + w$

è un'applicazione lineare.

<u>Def</u>: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W.

(i) Il sottospazio $\phi^{-1}(\{0_W\})$ di V si dice nucleo dell'applicazione lineare ϕ e si denota $\ker \phi$.

(ii) Il sottospazio $\phi(V)$ di W si chiama immagine di ϕ e si denota $\operatorname{Im} \phi$.

<u>Prop</u>: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Allora ϕ è iniettiva se e solo se $\ker \phi = \{0_V\}$.

<u>dim</u>. Gli elementi di $\ker\phi$ sono, per definizione, i vettori $v \in V$ tali che $\phi(v) = 0_W$.

Se ϕ è iniettiva si ha che $v \neq 0_V \Rightarrow \phi(v) \neq \phi(0_V) = 0_W$.

Dunque $\ker\phi = \{0_V\}$.

Se ϕ non è iniettiva, esistono $v_1, v_2 \in V$, con $v_1 \neq v_2$ e $\phi(v_1) = \phi(v_2)$. Ma allora si ha $\phi(v_1 - v_2) = \phi(v_1) - \phi(v_2) = 0_W$.

Dunque $v_1 - v_2 \in \ker\phi$ e $v_1 - v_2 \neq 0_V$; segue che $\ker\phi \neq \{0_V\}$. $\square$

Nella dimostrazione di questa proposizione si vede che gli insiemi $\phi^{-1}(\{w\})$ se ϕ è un'applicazione lineare o sono l'insieme vuoto oppure sono tutti in biezione con $\ker\phi$:

<u>Prop</u>: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W. Sia $w \in W$, allora

(i) se $w \notin \mathrm{Im}\,\phi$ si ha $\phi^{-1}(\{w\}) = \emptyset$

(ii) se $w \in \mathrm{Im}\,\phi$ si ha $\phi^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$, e se $v \in V$ è tale che $\phi(v) = w$, allora si ha

$$\phi^{-1}(\{w\}) = v + \ker\phi .$$

<u>dim</u>. Per definizione di $\mathrm{Im}\,\phi$ si ha $\phi^{-1}(w) \neq \emptyset \iff w \in \mathrm{Im}\,\phi$.

Se $w \in \mathrm{Im}\,\phi$, sia $v \in V$ t.c. $\phi(v) = w$.

Allora $v \in \phi^{-1}(\{w\})$ per definizione. Mostriamo che $v + v' \in \phi^{-1}(\{w\})$ se $v' \in \ker\phi$. Si ha $\phi(v+v') = \phi(v) + \phi(v')$ $= w + 0_W = w$. Viceversa, se $v'' \in \phi^{-1}(\{w\})$, allora $v' = v'' - v \in \ker\phi$. Infatti $\phi(v') = \phi(v''-v) = \phi(v'') - \phi(v)$ $= w - w = 0_W$. Dunque ogni $v'' \in \phi^{-1}(\{w\})$ si scrive come $v + v'$, con $v' \in \ker\phi$, cioè si ha $\phi^{-1}(w) = v + \ker\phi$. □

<u>Prop</u>: Sia $\phi : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Sia $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subset V$, allora si ha

$$\phi(U) = \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k) \rangle .$$

<u>dim.</u> Sia $u \in U$, allora si ha $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$.

Dunque $\phi(u) = \phi(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 \phi(u_1) + \dots + \alpha_k \phi(u_k)$, cioè $\phi(u) \in \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k) \rangle$, da cui segue

$$\phi(U) \subset \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k) \rangle .$$

Ma si ha chiaramente $\phi(u_1) \in \phi(U), \dots, \phi(u_k) \in \phi(U)$, dunque $\langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k) \rangle \subset U$.

Si conclude quindi che $\phi(U) = \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k) \rangle$. $\square$

<u>Oss</u>: In generale se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di U, si ha che $\{\phi(u_1), \dots, \phi(u_k)\}$ è un insieme di generatori di $\phi(U)$ ma non sempre è una base di $\phi(U)$.

<u>Esempio</u>: Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di $\ker \phi$. Se $k \geq 1$ si ha $\phi(u_1) = \dots = \phi(u_k) = 0_W$ e quindi questi vettori non sono mai linearmente indipendenti.