<u>Def</u>: Sia $\phi: V \to W$ un' applicazione lineare, si dice rango di ϕ la dimensione dell'immagine di ϕ: $rk\,\phi = \dim(\mathrm{Im}\,\phi)$.

<u>Def</u>: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si dice rango colonne di A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A (pensate come vettori di $\mathbb{R}^m$), ossia la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A. Sarà indicato $rk\,A$.

Si dice rango righe di A il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti (pensate come vettori di $\mathbb{R}^n$).

Vedremo che il rango righe di A è uguale al rango colonne di A e dunque tale numero può essere chiamato rango di A senza la specifica righe oppure colonne.

<u>Prop</u>: Sia $\phi: V \to W$ un' applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W. Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ rispettivamente una base di V e una base di W, e sia A la matrice associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. Allora si ha

$$rk\,\phi = rk\,A \quad .$$

<u>dim</u>. Sia $\phi_{\mathcal{W}}: W \to \mathbb{R}^m$ l'isomorfismo dato da $\mathcal{W}$.

allora abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \dim(\Phi_{\mathcal{W}}(\mathrm{Im}\,\phi))$. $\square$

<u>Esercizio</u>: Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione tale che

$$\phi(x,y,z) = (x-y+2z,\ 2x+2z,\ -x+2y-3z,\ y-z).$$

(a) verificare che ϕ è lineare

(b) determinare una base di $\ker\phi$ ed una base di $\mathrm{Im}\,\phi$

(c) Siano $\mathcal{V} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e

$$\mathcal{W} = \{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$$

una base di $\mathbb{R}^3$ ed una base di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.

Determinare la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}$ associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

(d) determinare $\mathrm{rk}(A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi})$.

<u>Svolgimento</u>: (a) Si ha $\phi(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) =$

$$= \big((x_1+x_2)-(y_1+y_2)+2(z_1+z_2),\ 2(x_1+x_2)+2(z_1+z_2),$$

$$-(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)-3(z_1+z_2),\ (y_1+y_2)-(z_1+z_2)\big) =$$

$$= (x_1-y_1+2z_1,\ 2x_1+2z_1,\ -x_1+2y_1-3z_1,\ y_1-z_1) +$$

$$+ (x_2-y_2+2z_2,\ 2x_2+2z_2,\ -x_2+2y_2-3z_2,\ y_2-z_2) =$$

$= \phi(x_1, y_1, z_1) + \phi(x_2, y_2, z_2).$

In maniera analoga si verifica $\phi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha\, \phi(x, y, z)$.

(b) Si ha $\ker \phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x,y,z) = (0,0,0,0) \}$

dunque si hanno le seguenti equazioni cartesiane per $\ker \phi$

$$\ker \phi : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è
(è la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

riduciamola in forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{IV + I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 2II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque si ha

$$\ker \phi : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\ker \phi = \{(x,y,z) \mid -x = z,\ y = z\} = \langle (-1,1,1) \rangle .$$

$\dim(\ker \phi) = 1$, dunque $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \mathrm{rk}\,\phi = 2$

Per trovare una base di $\mathrm{Im}\,\phi$ è sufficiente prendere due vettori linearmente indipendenti tra $\phi(1,0,0)$, $\phi(0,1,0)$, $\phi(0,0,1)$. Questi vettori sono le colonne della matrice

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E}',\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

ed $\mathcal{E}' = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

Si ha quindi che ad esempio $\{(1,2,-1,0), (-1,0,2,1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\,\phi$; $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = 2$.

(c) Si ha $\phi(1,0,0) = (1,2,-1,0)$. Bisogna esprimere tale vettore come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{W}$. Poiché sappiamo esprimere tale vettore come combinazione lineare dei vettori della base canonica $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^4$, esprimiamo i vettori di $\mathcal{E}'$ come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{W}$.

Si ha

$$(1,0,0,0) = (1,-1,0,0) + (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$

$$(0,1,0,0) = (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$

$$(0,0,1,0) = (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$

$$(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$$

Dunque segue che

$$(1,2,-1,0) = 1\cdot(1,-1,0,0) + 3\cdot(0,1,-1,0) + 2\cdot(0,0,1,-1) + 2\,(0,0,0,1)$$

Analogamente

$$\phi(1,1,0) = (0,2,1,1) = 2\,(0,1,-1,0) + 3\,(0,0,1,-1) + 4\,(0,0,0,1)$$

e

$$\phi(1,1,1) = (2,4,-2,0) = 2\,(1,-1,0,0) + 6\,(0,1,-1,0) + 4\,(0,0,1,-1) + 4\,(0,0,0,1)$$

Si conclude quindi che

$$A_{v,w,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Si ha $rk\left(A_{v,w,\phi}\right) = rk\,\phi = 2$.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^3$, sia $U = \langle (1,1,1) \rangle$ e $W = \{ (x,y,z) \mid x+y+z=0 \}$.

(a) Si scriva la matrice associata alla proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su W lungo U rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ del dominio e del codominio.

(b) Si scriva la matrice associata alla proiezione $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse W e direzione U rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di dominio e codominio.

<u>Svolgimento</u>: Notiamo intanto che $U \cap W = \{(0,0,0)\}$, dunque si ha $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Inoltre si ha $W = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$

(a) Si ha che, per definizione, $\pi(1,1,1) = (0,0,0)$,

$\pi(1,-1,0) = (1,-1,0)$ e $\pi(0,1,-1) = (0,1,-1)$.

Ora vogliamo calcolare $\pi(1,0,0)$, $\pi(0,1,0)$, $\pi(0,0,1)$.

Dobbiamo a tal fine esprimere i vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ come somma di un vettore in U e di un vettore in W.

Si ha $(1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \in W$, $(0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \in W$,

$(0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) \in W$. Quindi $\pi(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,

$\pi(0,1,0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ e $\pi(0,0,1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Segue che

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $\sigma = 2\pi - id$, dunque

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma} = 2A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi} - I_3 = 2\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Si poteva anche procedere come in (a), ossia esprimendo i vettori della base canonica $\mathcal{E}$ come somme di un vettore in U ed uno in W, sapendo che $\sigma(u+w) = -u+w$ se $u \in U$ e $w \in W$.

Siano V, W due spazi vettoriali, abbiamo visto che, fissate delle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ di V e W rispettivamente si ha una biezione

$$\Phi_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathcal{L}in(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} m = \dim W \\ n = \dim V \end{pmatrix}$$

che associa ad un'applicazione lineare $f: V \to W$ la sua matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

È possibile dotare $\mathcal{L}in(V,W)$ di una struttura di spazio vettoriale.

<u>Def</u>: Siano $f, g \in \mathcal{L}in(V,W)$, allora si definisce l'applicazione lineare $f+g: V \to W$ somma delle applicazioni lineari f e g nel seguente modo:

$$\forall v \in V, \ (f+g)(v) = f(v) + g(v).$$

Inoltre, se $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce l'applicazione lineare prodotto dell'applicazione f per lo scalare α nel seguente modo:

$$\forall v \in V, \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v).$$

<u>Prop</u>: Munito dell'operazione somma e dell'operazione di prodotto per uno scalare sopra definite, l'insieme $\mathcal{L}in(V,W)$ è uno spazio vettoriale.

Inoltre si ha

Prop: Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente. Siano $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ delle basi di V e W rispettivamente, allora si ha che l'applicazione

$$\Phi_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathcal{L}in(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

è lineare, ed è quindi un isomorfismo.

Cor: Si ha $\dim\big(\mathcal{L}in(V,W)\big) = \dim(V)\cdot\dim(W)$.

Applichiamo ora i risultati ottenuti nello studio delle applicazioni lineari allo studio dei sistemi lineari.

Def: Un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ è il dato seguente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

i numeri $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti del sistema, i numeri $b_i \in \mathbb{R}$ sono i termini noti del sistema.

Il sistema lineare si dice omogeneo se $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Il sistema può essere espresso nella seguente forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice matrice dei coefficienti del sistema o matrice incompleta del sistema. Il vettore colonna $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$

si dirà vettore dei termini noti del sistema, e la matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si dirà matrice completa del sistema.

<u>Esempio:</u>
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Def: Il sistema omogeneo associato ad un sistema di matrice completa $(A|\underline{b})$ è il sistema omogeneo con matrice dei coefficienti A.

Esempio: $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_2-2x_3=0 \\ 3x_1 \qquad +x_3=0 \end{cases}$ è il sistema omogeneo associato al sistema dell'esempio precedente.

Def: Dato un sistema lineare nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, un vettore $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ è soluzione del sistema se le equazioni del sistema sono soddisfatte ponendo $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$.

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ sarà denotato $S_{A,\underline{b}}$.

Interpretazione geometrica dei sistemi lineari.

Sia Σ un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, di matrice completa $(A|\underline{b}) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$.

La matrice dei coefficienti del sistema $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ corrisponde ad un'applicazione lineare

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$ tale che a $(x_1, \dots, x_n)$ associa

il vettore

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Il sistema può quindi essere riformulato come

$$\phi(\underline{x}) = \underline{b} .$$

Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema $S_{A,\underline{b}}$ si identifica con la controimmagine tramite ϕ del vettore $\underline{b}$:

$$S_{A,\underline{b}} = \phi^{-1}(\underline{b}) .$$

Abbiamo già studiato tali controimmagini:

(i) $S_{A,\underline{b}} = \emptyset$ se $\underline{b} \notin \operatorname{Im}\phi$

(ii) se $\underline{b} \in \operatorname{Im}\phi$, si ha $S_{A,\underline{b}} = \underline{a} + \ker\phi$

dove $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ è una soluzione del sistema Σ.

Possiamo riformulare quanto detto sopra in termini di $(A|\underline{b})$: