11

Esercizio: Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente come matrice associata alla base canonica la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali tale endomorfismo è iniettivo.

b) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare il nucleo e l'immagine di tale endomorfismo.

c) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema lineare

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, [redacted] le soluzioni del sistema

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento:

Riduciamo in forma a scala la matrice completa del sistema

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda+1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda+1 & -1 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}+\lambda\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\lambda+2 & -3 & 2 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda & 2 \end{array}\right)$$

[a questo punto, invece di procedere ad eliminare la seconda entrata dal terza riga, è preferibile eliminare λ dalla]

[seconda entrata della seconda riga, in modo tale da non dover dividere per λ]

$$\xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4-2\lambda & 4 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\lambda\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

per $\lambda \neq \pm 1$ si ha $\lambda^2 - 1 \neq 0$, dunque la matrice è in forma a scala; i pivot sono tutti nella matrice dei coefficienti, dunque $\operatorname{rk} A_\lambda = \operatorname{rk}\left(A_\lambda \middle| \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 3$. Il sistema è univocamente risolubile (ammette una sola soluzione) e

$\ker A_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathbb{R}^3$.

Troviamo l'unica soluzione, per $\lambda \neq \pm 1$, del sistema

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tale soluzione sarà la soluzione del sistema equivalente

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ y - (\lambda+2) z = 2 \\ (\lambda^2-1) z = 2(1-\lambda) \end{cases}$$

Poiché $\lambda^2 - 1 \neq 0$ si ha il sistema

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ y = 2 + (\lambda+2) z \\ z = 2 \dfrac{(1-\lambda)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = 2 \cdot \dfrac{-1}{\lambda+1} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ y = 2 - 2 \dfrac{\lambda+2}{\lambda+1} = \dfrac{2\lambda + 2 - 2\lambda - 4}{\lambda+1} = \dfrac{-2}{\lambda+1} \\ z = \dfrac{-2}{\lambda+1} \end{cases}$$

segue

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2}{\lambda+1} + 4 \cdot \dfrac{1}{\lambda+1} = \dfrac{2}{\lambda+1} \\ y = \dfrac{-2}{\lambda+1} \\ z = \dfrac{-2}{\lambda+1} \end{cases}$$

Si ha dunque, per $\lambda \neq \pm 1$, $S_{A_\lambda, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \left\{ \left(\dfrac{2}{\lambda+1}, \dfrac{-2}{\lambda+1}, \dfrac{-2}{\lambda+1} \right) \right\}$.

[Arrivati a questo punto è opportuno fare la verifica che,]

[per $\lambda \neq \pm$, $\left(\dfrac{2}{\lambda+1}, \dfrac{-2}{\lambda+1}, \dfrac{-2}{\lambda+1} \right)$ è soluzione del sistema $A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$]

Studiamo ora il caso $\lambda = 1$.

Per $\lambda = 1$, la riduzione della matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Il sistema ha rango 2, i pivot sono nella matrice dei coefficienti, quindi il sistema è compatibile; una soluzione particolare si ottiene ponendo $z = 0$:

$$\begin{cases} x = y \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

[Fare la verifica che $(2,2,0)$ è soluzione del sistema $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$]

Troviamo ora $\ker A_1$:

$$\ker A_1 : \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ \qquad y - 3z = 0 \end{cases}$$

per $z=1$ si ottiene $(x,y,z) = (1,3,1)$.

Dunque si ha $\ker A_1 = \langle (1,3,1) \rangle$

[Fare la verifica che $(1,3,1)$ è soluzione del sistema $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$]

Quindi segue che

$$S_{A_1, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = (2,2,0) + \langle (1,3,1) \rangle .$$

Si ha $\dim(\operatorname{Im} A_1) = 2$, una base di $\operatorname{Im} A_1$ è formata ad esempio da due colonne di A_1 linearmente indipendenti: $\operatorname{Im} A_1 = \langle (1,-1,1), (0,1,0) \rangle$.

Trattiamo ora il caso $\lambda = -1$.

Per $\lambda = -1$ la riduzione della matrice completa è

$$\begin{matrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

Il rango della matrice completa è 3, il rango della matrice incompleta è 2, dunque il sistema non ammette soluzioni cioè $S_{A_{-1},\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}} = \emptyset$.

Inoltre $\dim\left(\operatorname{Im} A_{-1}\right) = \operatorname{rk} A_{-1} = 2$, dunque una base di $\operatorname{Im} A_{-1}$ è formata ad esempio da due colonne di A_{-1} linearmente indipendenti:

$$\operatorname{Im} A_{-1} = \langle (1,-1,-2), (2,1,0) \rangle.$$

E si ha

$$\ker A_{-1} : \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ \phantom{-x +{}} y - z = 0 \end{cases}$$

Per $z = 1$ si ottiene $(x,y,z) = (-1,1,1)$, dunque

$$\ker A_{-1} = \langle (-1,1,1) \rangle$$

[Fare la verifica che $(-1,1,1)$ è sol. del sistema $A_{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$].

Esercizio:

(a) Stabilire se esiste una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1,1,1) = (1,2,0), \; f(1,2,0) = (1,1,1), \; f(2,1,4) = (0,1,-1).$$

Tale f è unica?

(b) Se esiste una f come al punto (a), determinarne una base per $\ker f$ ed una base per $\operatorname{Im} f$.

(c) Se esiste una f come al punto (a), scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

(d) Stabilire se esiste una applicazione lineare [illegible] tale che, oltre a soddisfare le richieste del punto (a) sia tale che $f(2,3,1) = (2,3,1)$.

(e) Stabilire se esiste una applicazione lineare $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1,1,1) = (1,1,1)$, $g(1,2,0) = (1,2,0)$, $g(2,1,4) = (0,1,-1)$, $g(0,1,-1) = (0,1,4)$. Tale g è unica?

Svolgimento:

Per sapere se tale applicazione lineare esiste e se è unica è necessario capire se i vettori $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,4)$ sono linearmente indipendenti. In caso non lo siano, allora le immagini di tali vettori tramite f devono soddisfare le stesse relazioni lineari di questi vettori per avere l'esistenza della f.

$(1,1,1), (1,2,0), (2,1,4)$ sono lin. ind. se e solo se

$\langle (1,1,1), (1,2,0), (2,1,4) \rangle = \mathbb{R}^3$. In tal caso essi formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Usiamo le operazioni elementari sui vettori $(1,1,1), (1,2,0), (2,1,4)$ per ottenere una base di $\langle (1,1,1), (1,2,0), (2,1,4) \rangle$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim(\langle (1,1,1), (1,2,0), (2,1,4) \rangle) = 3$, e quindi $\{(1,1,1), (1,2,0), (2,1,4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Sappiamo che le immagini dei vettori di una base tramite un'applicazione lineare possono essere specificate a piacere, e che tali immagini individuano univocamente l'applicazione lineare.

Dunque tale f esiste ed è unica.

Sappiamo che un insieme di generatori di $\mathrm{Im} f$ è dato dalle immagini tramite f di una base di $\mathbb{R}^3$,

quindi $\mathrm{Im} f = \langle (1,2,0), (1,1,1), (0,1,-1) \rangle$.

Usiamo le operazioni elementari su tali vettori per trovare una base di $\mathrm{Im} f$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\{(1,1,1),(0,1,-1)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$; $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

Si ha quindi $\dim \ker f = 1$. Troviamo una base di $\ker f$.

Sia $v = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (0,0,0)$.

Determiniamo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$f(\alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(2,1,4)) = \alpha f(1,1,1) + \beta f(1,2,0) + \gamma f(2,1,4) =$$

$$= \alpha(1,2,0) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0).$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = \gamma \\ 0 = 0 \end{cases}$$

[È possibile anche operare con le operazioni elementari e ridurre il sistema in forma a scala]

Ponendo $\gamma = 1$ si ottiene $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1,1,1)$

Le coordinate rispetto alla base $\{(1,1,1),(1,2,0),(2,1,4)\}$ di un tale v sono $(-1,1,1)$, dunque

$$v = -(1,1,1) + (1,2,0) + (2,1,4) = (2,2,3).$$

Quindi $\ker f = \langle (2,2,3) \rangle$.

Scriviamo la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

È necessario esprimere $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,4)$.

$$(1,0,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(2,1,4)$$

dà il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha \qquad + 4\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta - 2\gamma = 1 \\ 2\beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha = -4\gamma \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ \beta = 2\gamma + 1 \\ \gamma = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -3 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

Dunque $f(1,0,0) = f\big(8(1,1,1) - 3(1,2,0) - 2(2,1,4)\big) =$

$$= 8(1,2,0) - 3(1,1,1) - 2(0,1,-1) =$$

$$= (5, 11, -1).$$

Troviamo $f(0,1,0)$.

$(0,1,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(2,1,4)$ dà il sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=1 \\ \alpha \qquad +4\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta-2\gamma=0 \\ 2\beta-3\gamma=1 \\ \alpha=-4\gamma \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha=-4\gamma \\ \beta=2\gamma \\ \gamma=1 \end{cases} \Longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(-4,2,1)$$

Dunque $f(0,1,0)=f\big(-4(1,1,1)+2(1,2,0)+(2,1,4)\big)=$

$$=-4(1,2,0)+2(1,1,1)+(0,1,-1)$$

$$=(-2,-5,1)$$

Troviamo $f(0,0,1)$.

$(0,0,1)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,0)+\gamma(2,1,4)$ dà il sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \alpha \qquad +4\gamma=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \\ -\beta+2\gamma=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \beta=\gamma \\ \gamma=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=1 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

Dunque $f(0,0,1)=-3(1,2,0)+(1,1,1)+(0,1,-1)=(-2,-4,0)$

Quindi la matrice di f rispetto alle basi canoniche è

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 11 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(2,3,1) = f\big(2(1,0,0) + 3(0,1,0) + (0,0,1)\big) =$$

$$= 2(5,11,-1) + 3(-2,-5,1) + (-2,-4,0) =$$

$$= (2,3,1).$$

Si ha effettivamente $f(2,3,1) = (2,3,1)$.

Vediamo ora se esiste una $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste. Sappiamo che $\{(1,1,1), (1,2,0), (2,1,4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dunque se esiste una tale g è unica.

verifichiamo se si può avere $g(0,1,-1) = (0,1,4)$.

Esprimiamo $(0,1,-1)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\{(1,1,1), (1,2,0), (2,1,4)\}$.

Si ha $(0,1,-1) = -(1,1,1) + (1,2,0)$, dunque si deve avere

$$g(0,1,-1) = -g(1,1,1) + g(1,2,0) = -(1,1,1) + (1,2,0)$$

$$= (0,1,-1),$$

Si conclude che non esiste un'applicazione lineare g che soddisfa a tale richieste.