<u>Esercizio:</u> In $\mathbb{R}^3$, consideriamo i sottospazi

$$U = \langle (1,0,1) \rangle \quad \text{e} \quad V: \ x+2y+z=0 .$$

(a) Verificare che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$

(b) Determinare la matrice associata alla simmetria di asse V e direzione U rispetto alla base canonica.

<u>Svolgimento:</u>

(a) Si vede facilmente che $(1,0,1) \notin V$, dunque $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Inoltre $\dim U = 1$ e $\dim V = 2$, si conclude che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$

(b) Sia $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simmetria di asse V e direzione U.

σ è univocamente determinata dalle condizioni

- $\sigma(u) = -u \quad \forall u \in U$
- $\sigma(v) = v \quad \forall v \in V$

Infatti ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $u+v$ con $u \in U$ e $v \in V$, dunque

$$\sigma(u+v) = \sigma(u) + \sigma(v) = -u+v .$$

Calcoliamo $\sigma(1,0,0)$.

l'espressione lineare $x+2y+z$, calcolata su $(1,0,0)$ dà $1+2\cdot 0+0 = 1$

l'espressione lineare $x+2y+z$, calcolata su $(1,0,1)$ dà 2.

dunque $x+2y+z$, calcolata su $(1,0,0)-\frac{1}{2}(1,0,1)$ dà 0, cioè $(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}) \in V$.

Ma si ha $\quad (1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \left((1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1)\right)$

$$= \underset{\in U}{\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)} + \underset{\in V}{\left(+\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)}$$

Dunque $\quad \sigma(1,0,0) = \sigma\left(\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\right) =$

$$= \sigma\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) + \sigma\left(+\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) = (0,0,-1)$$

Allo stesso modo si ha $\quad (0,1,0) = \underset{\in U}{(1,0,1)} + \underset{\in V}{\left((0,1,0) - (1,0,1)\right)}$

Dunque $\quad \sigma(0,1,0) = \sigma(1,0,1) + \sigma(-1,1,-1)$

$$= (-1,0,-1) + (-1,1,-1) = (-2,1,-2)$$

Con lo stesso ragionamento si ha

$$(0,0,1) = \underset{\in U}{\frac{1}{2}(1,0,1)} + \underset{\in V}{\left((0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1)\right)}$$

Dunque $\quad \sigma(0,0,1) = (-1,0,0)$

Si conclude che la matrice associata a σ rispetto alla base canonica è

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori di uno spazio vettoriale V, introducendo delle coordinate in V, ossia scegliendo un isomorfismo $V \to \mathbb{R}^m$, il problema di calcolare $\dim(\langle v_1, \dots, v_n \rangle)$ è equivalente al problema di calcolare il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Abbiamo visto come calcolare il rango di una matrice tramite la riduzione di Gauss (ossia usando le operazioni elementari), vediamo adesso un altro metodo.

<u>Def</u>: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si dice minore di A una matrice ottenuta da A eliminando alcune righe e colonne.

<u>Esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- eliminando la prima riga e la seconda e la quarta colonne si ottiene il minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- eliminando la seconda riga e nessuna colonna si ottiene il minore $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Prop</u>: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora il rango di A è uguale al massimo ordine s di un minore quadrato invertibile.

<u>dim</u>. Sia $p = \operatorname{rk} A$. Sappiamo che p è uguale al massimo numero di righe di A linearmente indipendenti ed anche al massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.

Esistono quindi p righe di A linearmente indipendenti. Sia A' il minore di A ottenuto togliendo le altre righe. Si ha $A' \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ e $\operatorname{rk} A' = p$. Esistono dunque p colonne di A' linearmente indipendenti. Sia A'' il minore di A' ottenuto togliendo le altre colonne di A'. Si ha $A'' \in M_{p,p}(\mathbb{R})$ e chiaramente A'' è anche un minore di A. Inoltre $\operatorname{rk} A'' = p$, dunque A'' è invertibile. Dunque $p \leq s$.

Viceversa, se $B \in M_{s,s}(\mathbb{R})$ è un minore quadrato invertibile di A, si ha che le righe di B sono linearmente indipendenti, ma quindi anche le corrispondenti s righe di A sono linearmente indipendenti. Dunque $s \leq \operatorname{rk} A = p$.

Si deduce che $s = p$. $\square$

Il problema di calcolare il rango di una matrice è ricondotto al problema dell'invertibilità di matrici quadrate.

Vediamo ora un metodo per capire se una data matrice è invertibile o meno tramite il calcolo di una funzione dei suoi coefficienti. Tale funzione è detta determinante.

Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ $\left(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ è anche denotato } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \right)$.

Definiamo $\det A$.

caso $n=1$.

$A = (a)$, allora $\det A = a$.

caso $n=2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $\det A = ad - bc$.

caso generale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sia $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ il minore di A ottenuto eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Allora si ha

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} \det A_{k2} +$$
$$+ (-1)^{k+3} a_{k3} \det A_{k3} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det A_{kn}.$$

<u>Oss</u>: L'espressione che abbiamo dato come definizione di $\det A$ si dice sviluppo del determinante secondo la k-esima riga.

Si verifica (noi non lo dimostreremo) sviluppi del determinante secondo righe diverse danno lo stesso risultato.

Inoltre esiste anche un analogo sviluppo del determinante secondo la k-esima colonna.

<u>Esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- sviluppo secondo la prima riga

$$\det A = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (2) + 3 \cdot 1 = -7$$

- sviluppo secondo la seconda colonna

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -7.$$

<u>Esercizio</u>: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Svolgimento</u>: Sviluppando secondo l'ultima riga si ha

$$\det A = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot 4 = -120.$$