Oss: In generale, se A è una matrice triangolare superiore (ovvia se i termini sotto la diagonale principale sono nulli), $\det A$ è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. (Lo stesso vale per una matrice triangolare inferiore).

Prop: Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Dunque calcolando il determinante di una matrice quadrata è possibile stabilire se tale matrice è invertibile o meno.

Vediamo ora che il determinante ci permette anche di calcolare l'inversa di una matrice invertibile.

Def: Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, definiremo la trasposta A^t di A, come la matrice $A^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ottenuta da A scambiando le righe e le colonne.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, allora $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, allora $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sia A_{ij} il minore di A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Sia $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avente entrata i,j pari a $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ cioè $S = (s_{ij})$, con $s_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Sia $B = S^t$.

<u>Prop</u>: Con le definizioni date sopra vale

$$AB = BA = (\det A)\cdot I_n .$$

<u>dim.</u> L'entrata (i,i) della matrice AB coincide con lo sviluppo secondo la i-esima riga del determinante di A.
Per $i \neq j$, l'entrata (i,j) di AB coincide con lo sviluppo del determinante secondo la i-esima riga della matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima riga di A anche al posto della j-esima.

Dunque tale determinante è nullo poiché la matrice ottenuta non è di rango massimo (due righe sono uguali). □

Questa proposizione ci fornisce un metodo di calcolo dell'inversa di A qualora A sia invertibile.

Infatti A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, ed in tal caso si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot S^t .$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Costruiamo $S = (s_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$.

$s_{11} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 13$, $s_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 4$, $s_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -12$

e così via, usando la formula $s_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si ottiene

$$S = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -12 \\ -7 & 14 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- trasponiamo

$$S^t = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- facciamo la verifica

$$A \cdot S^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

- Si conclude che

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oss: Lo sviluppo di $\det A$ secondo la k-esima riga coincide con lo sviluppo di $\det(A^t)$ secondo la k-esima colonna.

Dunque $\det(A^t) = \det A$.

Vale il seguente risultato che non dimostreremo.

Prop: (Teorema di Binet):

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora si ha

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Poiché $\det(I_n) = 1$, da questo risultato segue che $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Allora $AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 5$, $\det(A) = -5$, $\det(B) = -1$.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, allora si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \det(A^{-1}) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{-2}{25} - \frac{3}{25} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$$

Esercizio: Risolvere il sistema lineare $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: Sappiamo che A è invertibile, dunque l'unica soluzione del sistema è $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cioè $\left(\frac{5}{21}, \frac{8}{21}, \frac{-3}{21}\right)$ (fare la verifica).

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Fissando una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W abbiamo visto che a ϕ è associata la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.

Poiché in V e W non ci sono in generale basi privilegiate, avremmo potuto fissare delle basi diverse $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ e $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$. La matrice associata a ϕ in questo caso è $A_{\mathcal{V}',\mathcal{W}',\phi} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Si pone naturalmente il seguente problema:

Che relazione c'è tra $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}$ e $A_{\mathcal{V}',\mathcal{W}',\phi}$?

__Def:__ Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ due basi di V. Allora la matrice

$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}$ associata all'endomorfismo identico di V

(cioè $id_V(v) = v \quad \forall v \in V$) rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$

si dice matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{V}$ alla base $\mathcal{V}'$.

Prop: Si ha, con le definizioni date sopra,

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\,A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = I_n = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V}\,A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V},$$

cioè $A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = \left(A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\right)^{-1}$.

dim.

Sappiamo che si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\,A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V\circ id_V}$$

ma

$$A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V\circ id_V} = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V} = I_n \quad . \square$$

Esercizio: Sia $\mathcal{E}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,2,0),(1,0,-1)\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le matrici $A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}}$ e $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ di cambiamento di base tra queste due basi.

Svolgimento: Si ha $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Inoltre si ha $A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \left(A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

Calcolando l'inversa di $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ si ottiene

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

In generale vediamo che le matrici di cambiamento di base ci permettono di passare tra due matrici associate alla stessa applicazione lineare $\phi : V \to W$.

<u>Prop</u>: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ due basi di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ due basi di W. Allora si ha

$$A_{\mathcal{V}', \mathcal{W}', \phi} = A_{\mathcal{W}, \mathcal{W}', id_W} \; A_{\mathcal{V}, \mathcal{W}, \phi} \; A_{\mathcal{V}', \mathcal{V}, id_V} .$$

<u>dim</u>. Si applica la proposizione sulla matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari, notando che

$$\phi \circ id_V = \phi \quad e \quad id_W \circ \phi = \phi . \square$$

<u>Esercizio</u>: Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(x, y, z) = (x+y, y+z)$. Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{A} = \{(1,0,1), (1,2,0), (1,0,-1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$.

<u>Svolgimento</u>: Siano $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

Si ha $A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sappiamo che si ha $A_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi} = A_{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}, id_{\mathbb{R}^2}} \; A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \phi} \; A_{\mathcal{A}, \mathcal{E}_3, id_{\mathbb{R}^3}}$

Inoltre si ha $A_{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}, id_{\mathbb{R}^2}} = \left(A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_2, id_{\mathbb{R}^2}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Dunque si ha $A_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $\phi : V \to V$ è un endomorfismo, il caso di maggiore significato geometrico nella scelta delle basi di dominio e codominio è la scelta di una stessa base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ per dominio e codominio.

In questo caso si ha, se $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ è un'altra base di V,

$$A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',\phi} = H^{-1} A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi} H$$

con $H = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V}$ matrice di passaggio da $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}$.

<u>Def</u>: Due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = H^{-1} B H$.

<u>Prop</u>: Matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

<u>dim</u>. La matrice invertibile H può essere pensata come matrice di cambiamento di base. $\square$

<u>Prop</u>: Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono simili allora $\det(A) = \det(B)$.

<u>dim</u> Si ha $\det(A) = \det(H^{-1} B H) = \det(H^{-1}) \det(B) \det(H)$ per il teorema di Binet. Dunque $\det(A) = \det(B)$ poiché

$\det(H^{-1}) = \det(H)^{-1}$. $\square$

<u>Def</u>: Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo, si definisce $\det(\phi)$ come $\det(A)$ con A una matrice associata a ϕ rispetto a qualche base di V.

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$ sia $U = \langle (3,2,1), (1,2,0) \rangle$ e $V = \langle (1,1,1) \rangle$.

Determinare la matrice della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su U lungo V.

Svolgimento: Sia $\mathcal{A}$ la seguente base di $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{A} = \{ (2,0,1), (1,2,0), (1,1,1) \}$ e sia $\mathcal{E}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Si ha, per definizione di π, che

$$A_{\mathcal{A},\mathcal{A},\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{infatti } U = \langle (2,0,1), (1,2,0) \rangle$$

$$\text{e } V = \langle (1,1,1) \rangle .$$

Vogliamo ora calcolare $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\pi}$.

Si ha

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\pi} = A_{\mathcal{A},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} \, A_{\mathcal{A},\mathcal{A},\pi} \, A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} .$$

Inoltre $A_{\mathcal{A},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

cioè $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Dunque si ha

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\pi} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$