Foglio di esercizi 8

Esercizio 1 Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Determinare quale delle seguenti matrici sono invertibili e calcolarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k-1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori di k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato da A_k non è iniettivo.

(b) Per tali valori calcolare una base di $\ker A_k$ e una base di $\mathrm{Im} A_k$.

(c) Per i valori di k per i quali A_k è iniettivo, trovare le soluzioni del sistema lineare

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 Sia $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,1,0),(0,-1,2)\}$ e sia $\mathcal{B} = \{(3,1,0),(0,-1,3),(-1,-1,-1)\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$ (suggerimento: calcolare la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ alla base canonica e la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$).

Esercizio 5 Siano $U = <(1,1,1),(2,1,0)>$ e $V = <(0,1,-2)>$.

(a) Verificare che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare la matrice rispetto alla base canonica della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse U e direzione V.

Esercizio 6 Sia $\phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_a(x,y,z) = (x+ay, (1-a)y+z, ax+y+2z)$.

(a) Determinare la matrice associata a ϕ_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare per quali valori del parametro a l'endomorfismo ϕ_a non è suriettivo.

(c) Per i valori di a per i quali ϕ_a non è suriettivo, determinare una base di $\ker\phi_a$ ed una base di $\mathrm{Im}\phi_a$.

(d) Determinare la matrice associata a ϕ_a rispetto alla base $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,1,0),(0,-1,2)\}$ di $\mathbb{R}^3$.