Foglio di esercizi 9

Esercizio 1 Calcolare la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che ha autovettori $w_1 = (3, 1)$ e $w_2 = (1, -3)$ associati, rispettivamente, agli autovalori 0 e 2.

Esercizio 2 Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore tale che:

$$\phi(1, 0, 0) = (1, 1, 0),$$

$$\phi(0, 1, 0) = \phi(0, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

(a) Scrivere la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche e scrivere l'immagine del generico vettore (x_1, x_2, x_3) di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la controimmagine del vettore $(2, 2, 1)$ e stabilire se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(c) Stabilire se ϕ è diagonalizzabile.

Esercizio 3 Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 Trovare autovalori ed autovettori di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e determinare due diverse matrici che diagonalizzano A, ovvero due diverse matrici P tali che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.

Esercizio 5 Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2, x_1 + x_3).$$

(a) Scrivere la matrice associata a F rispetto alla base canonica.

(b) Trovare il nucleo di F, una sua base e la sua dimensione.

(c) Dire se F è invertibile.

(d) Trovare gli autovalori di F.

(e) Trovare gli autospazi di F.

(f) Dire se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare:

- una matrice diagonale D associata all'endomorfismo F (rispetto ad una qualche base),
- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.

Esercizio 6 Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k-4 & -1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire per quali valori di k il vettore $v = (1, 0, -1)$ è autovettore di A_k.

Per tali valori di k, scrivere a quale autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ è associato e calcolare la molteplicità geometrica di λ.

(b) Dire per quali valori di k lo scalare 0 è autovalore di A_k.

(c) Dire per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

Per tali valori di k, determinare una matrice H che diagonalizza A_k e la corrispondente forma diagonale D.

(d) Per $k = 2$, determinare tutti gli autovettori della matrice A_2 che appartengono al sottospazio vettoriale $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$.