In $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale vi sono delle basi privilegiate, le cosiddette basi ortonormali.

<u>Def</u>: Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale. La base $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice ortonormale se

- $\|v_1\| = \|v_2\| = \dots = \|v_n\| = 1$
  ossia i vettori della base sono versori
- $v_i \cdot v_j = 0$ se $i \neq j$
  ossia i vettori della base sono a due a due ortogonali.

<u>Esempio</u>: La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

ad. es. $n=3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ si ha

- $\|(1,0,0)\| = \|(0,1,0)\| = \|(0,0,1)\| = 1$
- $(1,0,0)\cdot(0,1,0) = (1,0,0)\cdot(0,0,1) = (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0$

In $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale vi sono molte altre basi ortonormali oltre alla base canonica, vediamo ora un metodo per costruire una base ortonormale a partire da una base qualsiasi di $\mathbb{R}^n$. Questo procedimento va sotto il nome di <u>metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt</u>.

Metodo di Gram – Schmidt.

Sia $T \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare usuale, sia $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base di T. Mostriamo come ottenere una base $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ ortonormale di T.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \text{(si normalizza } v_1\text{)}$$

$$u_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} \qquad \text{(si normalizza } u_2'\text{)}$$

$$u_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}$$

$$\vdots$$

$$u_m' = v_m - (v_m \cdot u_1)u_1 - (v_m \cdot u_2)u_2 - \dots - (v_m \cdot u_{m-1})u_{m-1}$$

$$u_m = \frac{u_m'}{\|u_m'\|}$$

<u>Oss</u>: I vettori u_m sono ottenuti normalizzando i vettori u_m', dunque sono dei versori. Inoltre si verifica facilmente (usando l'induzione) che i vettori $u_1, \dots, u_m$ sono a due a due ortogonali (ossia $u_i \cdot u_j = 0$ se $i \neq j$).

Si verifica $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\dots$, $\langle v_1, \dots, v_i \rangle =$
$= \langle u_1, \dots, u_i \rangle$

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo sia

$\mathcal{V}$: $x+y+2z=0$. Determinare una base ortonormale di $\mathcal{V}$.

Svolgimento:

Troviamo una base di $\mathcal{V}$ risolvendo l'equazione che definisce $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V} = \langle (1,-1,0), (2,0,-1) \rangle$; $\{(1,-1,0),(2,0,-1)\}$ è una base di $\mathcal{V}$.

Ortonormalizziamo tramite il procedimento di Gram-Schmidt la base $\{(1,-1,0),(2,0,-1)\}$ di $\mathcal{V}$.

$$u_1 = \frac{(1,-1,0)}{\|(1,-1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$u_2' = (2,0,-1) - \left((2,0,-1)\cdot u_1\right)u_1 =$$

$$= (2,0,-1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,-1)\cdot(1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) =$$

$$= (2,0,-1) - \frac{2}{2}(1,-1,0) = (1,1,-1)$$

$$u_2 = \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

Otteniamo la seguente base ortonormale di $\mathcal{V}$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}$$

[Fare la verifica che u_1, u_2 sono dei versori tra loro ortogonali e che soddisfano l'equazione di $\mathcal{V}$]

Vediamo ora due classi di endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare euclideo.

Isometrie.

Def: Un endomorfismo $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ tale si abbia

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y$ si dice un'isometria di $\mathbb{R}^n$.

(ossia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria se rispetta il prodotto scalare)

Prop: Siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ dei vettori non nulli a due a due ortogonali, allora $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

dim. Sia $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n}$, mostriamo che $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Si ha $v_1 \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = v_1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0$, ma per la bilinearità del prodotto scalare (proprietà 2, 3) si ha

$v_1 \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 (v_1 \cdot v_1) + \alpha_2 (v_1 \cdot v_2) + \dots + \alpha_m (v_1 \cdot v_m)$

dunque $\alpha_1 \|v_1\|^2 = 0$ poiché i vettori sono tra loro ortogonali.

Ma $\|v_1\| \neq 0$ quindi $\alpha_1 = 0$. Alla stessa maniera si procede per dimostrare $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$. □

Da questa proposizione segue la seguente.

Prop: Un'isometria $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ è invertibile e manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Vediamo ora che proprietà possiede la matrice A di un'isometria $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

(Ossia $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$)

<u>Prop</u>: Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è la matrice associata ad un'isometria ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

(i) le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(ii) le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(iii) $AA^t = A^tA = I_n$ (ossia $A^t = A^{-1}$)

<u>dim</u>

(i) le colonne di A sono le immagini tramite ϕ dei vettori della base canonica. Poiché la base canonica è ortonormale, anche le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

(iii) Il fatto che le colonne di A formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è equivalente a $A^tA = I_n$, ma questo implica

$A^t = A^{-1}$, dunque anche $AA^t = I_n$.

(ii) Il fatto che le righe di A formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è equivalente a $AA^t = I_n$. □

<u>Def</u>: Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $AA^t = A^tA = I_n$ (ossia $A^t = A^{-1}$) si dice ortogonale.

Dunque si può riformulare la proposizione come segue.

<u>Prop</u>: Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ e A la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora ϕ è un'isometria di $\mathbb{R}^n$ se e solo se A è una matrice ortogonale.