Esercizio: Si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e t di equazioni cartesiane

$$r_a : \begin{cases} x_1 - x_2 + a x_3 = a \\ a x_2 - x_3 = a+1 \end{cases} \quad e \quad t : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r_a e t al variare di $a \in \mathbb{R}$ ed eventuali punti di intersezione.

Svolgimento:

Determiniamo la posizione reciproca di r_a e t; impostiamo quindi il sistema che definisce l'intersezione $r_a \cap t$.

$$r_a \cap t : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + a x_3 = a \\ a x_2 - x_3 = a+1 \end{cases}$$

Riduciamo a scala la matrice completa del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & a \\ 0 & a & -1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & a & a \\ 0 & a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}+a\text{II}]{\text{III}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & a \\ 0 & 0 & -1-a & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & -1-a & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\overline{IV} + (a+1)\,\overline{III} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a+1)^2 \end{pmatrix}$$

Dunque se $a \neq -1$, le rette r_a e t sono sghembe, se $a = -1$, le rette r_{-1} e t sono incidenti nel punto che risolve il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

dunque nel punto $P = (-1, 1, -1)$.

Abbiamo visto che nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, una retta è data da un'equazione $ax+by+c=0$.

Supponiamo di avere due rette $r_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ e $r_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$; dalle rette r_1 ed r_2 è possibile ottenere un'infinità di altre rette, prendendo combinazioni lineari delle equazioni di r_1 ed r_2:

$$r_{(\alpha,\beta)} : \alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

cioè

$$r_{(\alpha,\beta)} : (\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)=0$$

<u>Def</u>: L'insieme delle rette $r_{(\alpha,\beta)}$ del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, al variare di $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, si dice fascio di rette del piano affine individuato dalle rette r_1 ed r_2.

<u>Oss</u>: Le rette r_1 ed r_2 sono supposte distinte, altrimenti si avrebbe $r_{(\alpha,\beta)}=r_1=r_2 \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

<u>Esempio</u>: Il fascio di rette individuato dalle rette $r_1 : x+y+1=0$ e $r_2 : 2x-y-3=0$ è costituito da tutte le rette di equazione

$$r_{(\alpha,\beta)} : (\alpha+2\beta)x+(\alpha-\beta)y+(\alpha-3\beta)=0 \quad , \text{al variare di } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Quindi, ad esempio, $r_{(1,1)} : 3x-2=0$ è una retta appartenente a tale fascio.

Si possono avere due casi distinti:

(i) Le rette r_1 e r_2 sono incidenti, ossia $r_1 \cap r_2 = P$.

In questo caso P appartiene ad ogni retta $r_{(\alpha,\beta)}$ del fascio individuato da r_1 e r_2. Viceversa, ogni retta passante per P è del tipo $r_{(\alpha,\beta)}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Se $r_1 \cap r_2 = P$, il fascio di [redacted] rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ individuato da r_1 e r_2 è detto fascio di rette proprio di centro il punto P; è costituito da tutte le rette del piano passanti per P.

(ii) Le rette r_1 e r_2 sono parallele distinte, ossia $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

In questo caso ogni retta $r_{(\alpha,\beta)}$ del fascio è parallela a r_1 e r_2. Viceversa, ogni retta parallela a r_1 e r_2 è del tipo $r_{(\alpha,\beta)}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, il fascio di rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ individuato da r_1 e r_2 è detto fascio improprio di rette; esso è composto da tutte le rette parallele ad una qualsiasi retta del fascio.

<u>Esempio</u>: Se $r_1 : x + y - 1 = 0$ e $r_2 : 2x - y - 2 = 0$, il fascio di rette $r_{(\alpha,\beta)} : (\alpha + 2\beta)x + (\alpha - \beta)y + (\alpha - 2\beta) = 0$ individuato da r_1 e r_2 è il fascio di rette proprio di centro $(1,0)$, ossia è composto da tutte le rette passanti per $(1,0)$.

Allo stesso modo, in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, è possibile definire il fascio di piani $\pi_{(\alpha,\beta)} : (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + (\alpha c_1 + \beta c_2)z +$

$$+ (\alpha d_1 + \beta d_2) = 0$$

individuato da due piani distinti $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$.

Anche per i fasci di piani si possono avere due casi:

(i) π_1 e π_2 incidenti, ossia $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ è una retta di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

In questo caso il fascio di piani individuato da π_1 e π_2 è composto da tutti e soli i piani contenenti la retta r.

Def: Il fascio di piani di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ individuato da due piani incidenti π_1 e π_2 è detto fascio di piani proprio di sostegno la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$; esso è costituito da tutti e soli i piani contenenti r.

(ii) π_1 e π_2 paralleli distinti, ossia $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.

Def: Il fascio di piani di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ individuato da due piani paralleli distinti π_1 e π_2 è detto fascio di piani improprio ed è costituito da tutti e soli i piani paralleli ad uno qualsiasi di essi.

Esercizio: Determinare il piano π di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ contenente la retta $r = (1,0,1) + \langle (1,2,1) \rangle$ e passante per il punto $P = (3,-2,1)$.

Svolgimento:

Troviamo delle equazioni cartesiane per r.

Poiché delle equazioni cartesiane per $\langle (1,2,1) \rangle$ sono

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

si ha che delle equazioni cartesiane per r saranno del tipo $\begin{cases} 2x - y - d_1 = 0 \\ x - z - d_2 = 0 \end{cases}$.

Imponendo il passaggio per $(1,0,1)$ della retta r si ottiene $\begin{cases} 2 - d_1 = 0 \\ 0 - d_2 = 0 \end{cases}$ ossia $r: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

Se $\pi_1 : 2x - y - 2 = 0$ e $\pi_2 : x - z = 0$, il fascio di piani individuato da π_1 e π_2 sarà il fascio proprio di piani di sostegno la retta r.

Dunque π avrà equazione $\pi : (2\alpha + \beta)x - \alpha y - \beta z - 2\alpha = 0$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Individuiamo α, β imponendo il passaggio per $P = (3,-2,1)$:

$(2\alpha + \beta)3 + 2\alpha - \beta - 2\alpha = 0$ ossia $6\alpha + 2\beta = 0$ cioè $\beta = -3\alpha$.

Ponendo $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione $\pi : -x - y + 3z - 2 = 0$.