Esercizio: Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x+2y+z+6=0 \\ x+y+2z+3=0 \end{cases}$$

(a) Determinare una forma parametrica delle rette r_1 e r_2.

(b) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2. Calcolare la distanza tra r_1 e r_2.

(c) Determinare un piano π parallelo a r_1 e r_2 ed equidistante da r_1 e r_2.

(d) Determinare dei punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale sul piano π.

Svolgimento:

Risolviamo il sistema che definisce r_1:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x-y-2z = -3 \\ \quad y+z = 3 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z=0$ otteniamo la soluzione particolare $(0,3,0)$.
per $z=1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(1,-1,1)$, dunque $r_1 = (0,3,0) + \langle (1,-1,1) \rangle$.

Risolviamo il sistema che definisce r_2:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+2y+z=-6 \\ \quad -y+z=3 \end{cases}$$ la variabile libera è z.

Per $z=0$ si ottiene la soluzione particolare $(0,-3,0)$, per $z=1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(-3,1,1)$, dunque $r_2 = (0,-3,0)+\langle(-3,1,1)\rangle$.

(b) Poiché $(1,-1,1)$ e $(-3,1,1)$ sono lin. ind. è possibile calcolare la distanza con la formula

$$\text{dist}(r_1,r_2) = \frac{\left|\left((0,3,0)-(0,-3,0)\right)\cdot\left((1,-1,1)\times(-3,1,1)\right)\right|}{\|(1,-1,1)\times(-3,1,1)\|}$$

Dunque

$$\text{dist}(r_1,r_2) = \frac{|(0,6,0)\cdot(-2,-4,-2)|}{\|(-2,-4,-2)\|} =$$

$$= \frac{|(0,6,0)\cdot(1,2,1)|}{\|(1,2,1)\|} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

La distanza non è nulla, dunque le rette sono sghembe.

(c) Il piano π avrà giacitura $\langle (1,-1,1),(-3,1,1) \rangle$.

Usando il prodotto vettoriale $(1,-1,1) \times (-3,1,1) = (-2,-4,-2)$, si ha che la giacitura di π ha equazione $x+2y+z=0$

Dunque π ha equazione $\pi : x+2y+z+d=0$

Poiché π è parallelo a π_1 e π_2 si ha

$$\text{dist}(\pi_1, \pi) = \text{dist}((0,3,0), \pi)$$

e

$$\text{dist}(\pi_2, \pi) = \text{dist}((0,-3,0), \pi)$$

Usando la formula per la distanza di un punto da un piano si ottiene

$$\text{dist}(\pi_1, \pi) = \frac{|6+d|}{\sqrt{6}}$$

e $$\text{dist}(\pi_2, \pi) = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

Imponendo $\text{dist}(\pi_1, \pi) = \text{dist}(\pi_2, \pi)$ si ottiene

$$\frac{|6+d|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

da cui $|d+6| = |d-6|$, elevando ambo i membri al quadrato si ottiene $(d-6)^2 = (d+6)^2$, cioè $d=0$.

Dunque il piano cercato è $\pi : x+2y+z=0$

(d) La proiezione ortogonale di un punto P sul piano π si ottiene intersecando la retta ortogonale a π per P con il piano π.

Se due punti hanno stessa proiezione ortogonale su π vuol dire che giacciono sulla stessa retta ortogonale di π.

Poiché r_1 e r_2 sono sghembe, esistono solo due punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ con queste proprietà, sono i punti di minima distanza.

Determiniamo tali punti.

Determiniamo la retta t di minima distanza.

$\pi_1 = (0,3,0) + \langle (1,-1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(1,-1,1) \times (1,2,1) = (-3,0,3)$ si ha che π_1

ha equazione $x - z + d = 0$, $d=0$ poiché $(0,3,0) \in \pi_1$.

Dunque $\pi_1 : x - z = 0$

$\pi_2 = (0,-3,0) + \langle (-3,1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(-3,1,1) \times (1,2,1) = (-1,4,-7)$, π_2 ha equazione

$\pi_2 : x - 4y + 7z + d = 0$ e poiché $(0,-3,0) \in \pi_2$ si ha

$d = -12$, cioè $\pi_2 : x - 4y + 7z - 12 = 0$.

Segue che t ha equazioni

$$t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

Intersechiamo t con r_1:

$$r_1: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3-\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad , \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha - 12 + 4\alpha + 7\alpha - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \alpha = 2$$

cioè $r_1 \cap t = (2,1,2)$

Intersechiamo t con r_2:

$$r_2: \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = -3+\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad , \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} -3\alpha - \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \alpha = 0$$

cioè $r_2 \cap t = (0,-3,0)$

I punti $P_1 = (2,1,2)$ e $P_2 = (0,-3,0)$ sono i punti di minima distanza di r_1 da r_2 ed hanno stessa proiezione ortogonale su π.

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P_1, P_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| (2,4,2) \| = 2\sqrt{6}.$$

<u>Esercizio:</u> Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_t = \langle (1,t,0,t), (t,0,t,t) \rangle ,$$

$$W = \text{[redacted]} \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ di W, la dimensione di W e per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}_{U_t}$ di U_t e la dimensione di U_t.

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_t e W non [redacted] siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base $\mathcal{B}_{U_t \cap W}$ di $U_t \cap W$ e completare ad una base $\mathcal{B}_{U_t + W}$ di $U_t + W$.

(c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\forall t \geq 1$

$$U_t \oplus T = W \oplus T = \mathbb{R}^4 .$$

Svolgimento:

(a) Risolvendo il sistema che definisce W si ha

$W = \langle (1,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$; $\dim W = 2$ e

$\{(1,1,-1,0), (0,0,0,1)\}$ è una base di W.

Si ha $U_t = \langle (1,t,0,t), (t,0,t,t) \rangle$.

Inoltre, i vettori $(1,t,0,t)$ e $(t,0,t,t)$ sono

lin. ind. per $t \neq 0$.

Dunque

per $t \neq 0$

$\{(1,t,0,t), (1,0,1,1)\}$ è una base di U_t ; $\dim U_t = 2$.

Per $t = 0$

$\{(1,0,0,0)\}$ è una base di U_0 ; $\dim U_0 = 1$.

(b) W e U_t non sono in somma diretta se si ha
$W \cap U_t \neq \{(0,0,0,0)\}$.

$U_t = \{ \alpha(1,t,0,t) + \beta(1,0,1,1) \}$ per $t \neq 0$

Il vettore $(\alpha+\beta, \alpha t, \beta, \alpha t+\beta)$ appartiene a W
se e solo se
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha t + \beta = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ -2\beta t + \beta = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ (1-2t)\beta = 0 \end{cases}$$

dalla seconda equazione deriva $\beta = 0$ o $1-2t=0$

se $\beta = 0$ anche $\alpha = 0$ e ritorna il vettore nullo.

Se $t = \frac{1}{2}$, β è arbitrario e $\alpha = -2\beta$.

Si conclude che

$$U_t \cap W = \{(0,0,0,0)\} \quad \text{per } t \neq \frac{1}{2}$$ (il caso $t=0$ si verifica facilmente)

e per $t = \frac{1}{2}$ si ha

$$U_{1/2} \cap W = \langle (-1,-1,1,0) \rangle$$

$\{(1,1,-1,0)\}$ è una base di $U_{1/2} \cap W$.

Si ha che $\{(1,1,-1,0), (0,0,0,1)\}$ è una base di W,

e $\{(1,1,-1,0), (1,0,1,1)\}$ è una base di $U_{1/2}$;

ambedue completano la base $\{(1,1,-1,0)\}$ di $U_{1/2} \cap W$,

dunque l'unione $\{(1,1,-1,0), (0,0,0,1), (1,0,1,1)\}$ di queste due basi è una base di $U_{1/2} + W$.

(c) Il sottospazio $T = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

è in somma diretta con W e con U_t,

$\forall t \geq 1$, inoltre $\dim T = 2$, dunque

$$\dim (W+T) = \dim (U_t + T) = 4, \forall t \geq 1$$

Quindi

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus T = U_t \oplus T$$

nel caso $T = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$.

Esercizio: Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia

$$A_k = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-1 & 1-k & k \\ k-1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base di $\operatorname{Im} f_k$. f_k è iniettiva, è suriettiva, è biettiva?

(b) Determinare un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale valore trovare una base ortonormale di autovettori.

(c) Determinare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f_k è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(d) Determinare un valore del parametro k tale che la matrice A_k sia ortogonale.

(e) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a g_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3,g_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-k & 1-k & k \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

Svolgimento:

(a) Si ha

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-1 & 1-k & k \\ k-1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} = -k^2+2k-1-k =$$

$$= -(k^2-k+1)$$

il polinomio k^2-k+1 non ha radici reali, dunque

$\det A_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

Segue che $\operatorname{Im} g_k = \mathbb{R}^3$, g_k è iniettivo, suriettivo, biettivo.

(b) Per il teorema spettrale g_k è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se A_k è simmetrica.

Ma $A_k = A_k^t$ se e solo se $k=1$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Studiamo gli autospazi di A_1.

Il polinomio caratteristico è

$$P(t) = \det(A_1 - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(t^2-1)$$

$$= -(t-1)^2(t+1)$$

autovalori: 1 di molt. alg. 2

-1 di molt alg. 1

autospazi:

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$$

$$V_{-1} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

una base ortonormale di V_1 è $\left\{ (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

una base ortonormale di V_{-1} è $\left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$.

(c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f_k.

$$P(t) = \det(A_k - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ k^2-1 & 1-k-t & k \\ k-1 & 1 & k-1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)\left(t^2 - (k-1)^2 - k\right) =$$

$$= (1-t)\left(t^2 - (k^2-k+1)\right)$$

$k^2-k+1 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$, dunque $P(t)$ ha 3 radici reali. Le radici sono distinte se

$k^2-k+1 \neq 1$, cioè se $k \neq 0,1$.

Quindi per $k \neq 0,1$ l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile.

Studiamo ora i casi rimanenti.

$k = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico è

$$P(t) = -(t-1)^2(t+1)$$

$$V_1 = \ker(A_0 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \langle (0,2,1) \rangle$$

la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 2 mentre la sua molteplicità geometrica è 1

dunque f_0 non è diagonalizzabile.

$k = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto che f_1 è diagonalizzabile.

Dunque f_k è diagonalizzabile per $k \neq 0$.

(d) Una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Le colonne di A_k sono

$$(1, k^2-k, k-1), \; (0, 1-k, 1), \; (0, k, k-1)$$

Si ha $\|(0, 1-k, 1)\| = \sqrt{(1-k)^2+1} = 1$ se e solo se $k-1=0$, ossia se e solo se $k=1$

in tal caso le colonne di A_1 sono

$(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)$ e formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Dunque A_k è ortogonale se e solo se $k=1$.

(e) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

La condizione $A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_3, f_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-k & 1-k & k \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix}$

equivale a

$$f_k(v_1) = (1, k^2-k, k)$$
$$f_k(v_2) = (0, 1-k, 1)$$
$$f_k(v_3) = (0, k, k-1)$$

Dobbiamo trovare tre vettori v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti con queste proprietà.

Si ha

$$(1, k^2-k, k) = (1, k^2-1, k-1) + (0, 1-k, 1)$$

$$= f_k(e_1) + f_k(e_2)$$

$$= f_k(e_1+e_2)$$

Dunque possiamo prendere $v_1 = e_1 + e_2$.

Si ha $(0, 1-k, 1) = f(e_2)$

Dunque possiamo prendere $v_2 = e_2$

Si ha

$$(0, k, k-1) = f(e_3)$$

Dunque possiamo prendere $v_3 = e_3$.

Si conclude che $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Osserviamo inoltre che poiché f_k è iniettiva non c'era altra scelta per la base $\mathcal{B}$.

Esercizio: Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$-x^4+x^3-x+1=0 .$$

Svolgimento:

$$-x^4+x^3-x+1=0 \iff x^4-x^3+x-1=0$$

ma $x^4-x^3+x-1 = x^3(x-1)+x-1 = (x^3+1)(x-1)$

Dunque le radici di $-x^4+x^3-x+1$

sono: 1

e le radici di x^3+1

ossia $x = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)$

per $k=0,1,2$

Ossia $x_0 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -1$

$x_2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e 1 sono tutte le soluzioni complesse dell'equazione $-x^4+x^3-x+1=0$.