Foglio di esercizi 12

Esercizio 1:

Risolviamo il sistema che definisce r.

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{II - 5I} \begin{matrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -10 & -19 \end{matrix}$$

z variabile libera

per $z = 0$ si ha la soluzione particolare

$$\left(\frac{10}{12}, \frac{-19}{12}, 0 \right)$$

per $z = 1$ si ha la soluzione del sistema omogeneo associato

$$\left(-\frac{4}{11}, \frac{10}{12}, 1 \right)$$

dunque $r = \left(\frac{10}{12}, \frac{-19}{12}, 0 \right) + \langle (-4, 10, 12) \rangle$

$$= \left(\frac{5}{6}, \frac{-19}{12}, 0 \right) + \langle (-2, 5, 6) \rangle$$

(b) Calcoliamo $(2,1,0) \times (3,-1,2)$.

$$(2,1,0) \times (3,-1,2) = (2,-4,-5)$$

dunque $\pi : 2x - 4y - 5z - d = 0$

imponendo il passaggio per $(3,0,-4)$ si ottiene

$$\pi : 2x - 4y - 5z - 26 = 0 .$$

(c) $\pi': -2x+5y+6z-d=0$

imponendo il passaggio per $P=(0,1,-1)$ si ottiene

$$\pi': -2x+5y+6z+1=0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene una forma parametrica di π'.

$$\pi' = (0,1,-1) + \langle (1,-2,2),(5,2,0) \rangle$$

(d) poiché le equazioni di π e π' non hanno parte lineare omogenea proporzionale si deduce che π e π' sono incidenti.

(e) $\text{dist}(\pi,\pi')=0$.

Esercizio 2:

(a) Calcoliamo i prodotti vettoriali $(2,2,-1)\times(0,1,-2)$ e $(1,1,0)\times(1,0,1)$.

$$(2,2,-1)\times(0,1,-2) = (-3,4,2)$$

$$(1,1,0)\times(1,0,1) = (1,-1,-1)$$

dunque

$$\pi_1 : -3x+4y+2z-d_1=0 \quad \text{e}$$

$$\pi_2 : x-y-z-d_2=0$$

imponendo $(2,3,4)\in\pi_1$ e $(-1,2,1)\in\pi_2$ si ottiene

$$\pi_1 : -3x+4y+2z-14=0$$

$$\pi_2 : x-y-z+4=0$$

(b) Eliminiamo il parametro dalle equazioni

$$r : \begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$$

si ottiene

$$r : \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$$

(c) Si ha

$$s: \begin{cases} -3x+4y+2z-d_1=0 \\ x-y-z-d_2=0 \end{cases}$$

imponendo il passaggio per $(1,-1,0)$ si ottiene

$$s: \begin{cases} -3x+4y+2z+7=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$$

Calcolando il prodotto vettoriale $(-3,4,2)\times(1,-1,-1)$ si ottiene

$$(-3,4,2)\times(1,-1,-1) = (-2,-1,-1)$$

dunque si ha

$$s = (1,-1,0) + \langle (2,1,1) \rangle .$$

(d) Determiniamo π.

$\pi: \; x-y-z-d=0$ imponendo $(0,0,1)\in\pi$ si ottiene

$$\pi: \; x-y-z+1=0$$

Poiché $(2,1,1)$ soddisfa $x-y-z=0$, s e π sono paralleli. Poiché $(1,-1,0)$ non soddisfa $x-y-z+1=0$ la retta s è esterna al piano π.

(e) Poiché s e π sono paralleli, $\mathrm{dist}(s,\pi) = \mathrm{dist}((1,-1,0),\pi)$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} .$$

Esercizio 3:

(a) Risolviamo il sistema che definisce r_1.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{matrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 14 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z = -2 \\ \quad y - 2z = -7 \end{cases}$$ z è la variabile libera

per $z = 0$ si ottiene la soluzione $(5, -7, 0)$

per $z = 1$ si ottiene la soluzione dell'omogenea associata $(-1, 2, 1)$

dunque $r_1 = (5, -7, 0) + \langle(-1, 2, 1)\rangle$

Risolviamo il sistema che definisce r_2.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{II-I} \begin{matrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$r_2 : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ \quad\quad y = 1 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z = 0$ si ottiene $(-\frac{1}{3}, 1, 0)$

per $z = 1$ si ottiene la soluzione dell'omogenea associata $(\frac{1}{3}, 0, 1)$

Dunque $r_2 = (-\frac{1}{3}, 1, 0) + \langle(1, 0, 3)\rangle$

(b) Calcoliamo il prodotto vettoriale $(2,-3,0)\times(1,-1,1)$.

$$(2,-3,0)\times(1,-1,1)=(-3,-2,1)$$

Dunque

$\pi: -3x-2y+z-d=0$, imponendo $(2,1,5)\in\pi$

si ottiene

$$\pi: -3x-2y+z+3=0$$

(c) Calcoliamo il prodotto vettoriale $(-1,2,1)\times(1,0,3)$.

$$(-1,2,1)\times(1,0,3)=(6,4,-2)$$

dunque $r=(2,-1,2)+\langle(3,2,-1)\rangle$.

(d) Si ha $s=(2,0,2)+\langle(3,2,-1)\rangle$.

(e) r e s sono parallele e poiché $(2,0,2)-(2,-1,2)=(0,1,0)$ non appartiene a $\langle(3,2,-1)\rangle$, esse sono distinte.

Sia $\pi': 3x+2y-z-2=0$ il piano ortogonale a r e s e passante per $(2,-1,2)$.

Determiniamo $s\cap\pi'$.
Sostituendo $x=2+3\alpha$, $y=2\alpha$, $z=2-\alpha$ nell'equazione di π' si ottiene $6+9\alpha+4\alpha+\alpha-2-2=0$ cioè $\alpha=\frac{-1}{7}$.

Segue che

$$s \cap \pi' = \left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{15}{7} \right)$$

Dunque

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}\left((2, -1, 2), \left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{15}{7} \right) \right) =$$

$$= \left\| \left(\frac{3}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-1}{7} \right) \right\| = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Esercizio 4:

(a) Risolviamo il sistema che definisce r.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$r_1 : \begin{cases} x+y-z = -2 \\ 2y-z = -7 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z=0$ si ottiene $\left(\frac{3}{2}, \frac{-7}{2}, 0\right)$

per $z=1$ si ottiene la soluzione dell'omogenea associata $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Dunque $r_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{-7}{2}, 0\right) + \langle (1,1,2) \rangle$

(b) Eliminiamo il parametro α da

$$r_2 : \begin{cases} x = -4+3\alpha \\ y = 3+\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Si ottiene

$$r_2 : \begin{cases} x+3z = -4 \\ y+z = 3 \end{cases}$$

(c) $r_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) + \langle (1,1,2) \rangle$

$r_2 = (-4,3,0) + \langle (3,1,-1) \rangle$

Poiché $(1,1,2), (3,1,-1)$ sono lin. ind., le rette r_1 e r_2 non sono parallele.

Inoltre $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) - (-4,3,0) = \left(\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, 0\right)$

Per vedere se r_1 e r_2 sono sghembe calcoliamo il seguente determinante.

$$\det \begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ -13 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -33 - 91 = -124 \neq 0$$

dunque r e s sono sghembe.

(d) Si ha

$$(1,1,2) \times (3,1,-1) = (-3,7,-2)$$

dunque

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \frac{\left| \left(\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, 0\right) \cdot (-3,7,-2) \right|}{\| (-3,7,-2) \|} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{124}{\sqrt{62}} = \frac{2}{2}\sqrt{62} = \sqrt{62}$$

(e)

Consideriamo

$$\pi_1 = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{-7}{2}, 0\right) + \langle (1,1,2), (-3,7,-2) \rangle$$

Troviamo un'equazione di π_1.

Si ha $(1,1,2) \times (-3,7,-2) = (-16,-4,10)$

Dunque

$\pi_1 : 8x + 2y - 5z - d_1 = 0$ imponendo $\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{-7}{2}, 0\right) \in \pi_1$

si ottiene

$$\pi_1 : 8x + 2y - 5z - 5 = 0$$

Intersechiamo r_2 con π_1.

$$r_2 : \begin{cases} x = -4 + 3\alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$-32 + 24\alpha + 6 + 2\alpha + 5\alpha - 5 = 0$ cioè $31\alpha = 31$

ossia $\alpha = 1$. Segue che

$$r_2 \cap \pi_1 = (-1, 4, -1)$$

Consideriamo

$$\pi_2 = (-4, 3, 0) + \langle (3,1,-1), (-3,7,-2) \rangle$$

Troviamo un'equazione di π_2.

Si ha $(3,1,-1) \times (-3,7,-2) = (5,9,24)$

Si ha quindi

$\pi_2 : 5x + 9y + 24z - d_2 = 0$, imponendo $(-4,3,0) \in \pi_2$

si ottiene

$$\pi_2 : 5x + 9y + 24z - 7 = 0$$

Intersechiamo r_1 con π_2.

$$r_1 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = -\frac{7}{2} + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{15}{2} + 5\alpha - \frac{63}{2} + 9\alpha + 48\alpha - 7 = 0 \quad \text{cioè} \quad 62\alpha = \frac{62}{2}$$

ossia $\alpha = \frac{1}{2}$

da cui segue $r_1 \cap \pi_2 = (2,-3,1)$

I punti $P_1 = (-1,4,-1)$ e $P_2 = (2,-3,1)$ sono i punti

di minima distanza tra r_1 e r_2.

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, P_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| (-3,7,-2) \|$$

$$= \sqrt{62}$$