Esercizi di ricapitolazione 1

Esercizio 1 Sia $\phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\phi_k(x, y, z) = (x + 2y + (1 + k)z, -y - kz, x + ky + z).$$

(a) Determinare la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ associata a ϕ_k.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base di $\ker\phi_k$ ed una base di $\mathrm{Im}\phi_k$.

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare $\phi_k^{-1}(0, 1, 2)$.

Esercizio 2

(a) Quante applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ esistono tali che $\phi(1, 4, -1, 0) = (3, -1, 1)$, $\phi(1, 2, -1, 0) = (0, 1, 1)$, $\phi(-1, 0, 1, 1) = (1, -1, 0)$, $\phi(1, 2, -1, -1) = (2, -1, 0)$?

(b) Detrminare la matrice rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio di un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ come in (a) e che soddisfi inoltre $\phi(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

(c) Si può avere $\ker(\phi) = \{0\}$ per una ϕ come in (a)? Si può avere $\dim(\ker(\phi)) = 1$? Si può avere $\dim(\ker(\phi)) = 2$?

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x - y + 2z + w = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V =< (2, 1, 1, -1), (-1, 0, 2, 1), (1, 1, 3, 0) > .$$

(a) Determinare delle basi dei sottospazi $U, V, U \cap V, U + V$.

(b) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

(c) Determinare un sottospazio W tale che $U \oplus W = V \oplus W = \mathbb{R}^4$. Tale sottospazio è unico?

(d) È possibile che si abbia $W \cap (U + V) = \{0\}$? Esiste un W come in (c) tale che $\dim(W + (U \cap V)) = 2$?

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^3$ sia $U =< (1, 2, -1), (3, 1, 0) >$ e sia $V =< (0, 1, 1) >$.

(a) Verificare che si ha $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la matrice associata alla proiezione π su U lungo V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Trovare un sottospazio proprio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\{0\} \subset \pi(W) \subset W$, dove le inclusioni sono strette. Tale sottospazio è unico?