Esercizi di ricapitolazione 2

Esercizio 1 Si consideri l'applicazione lineare parametrica $f_k : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ tale che

$$f_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -(a+c+d)x^2 + (a-b+kc)x + kb + k^2c$$

(a) Determinare la matrice associata ad f_k rispetto alla base

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

del dominio ed alla base

$$\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$$

del codominio.

(b) Determinare una base di $\ker(f_k)$ ed una base di $\mathrm{Im}(f_k)$.

(c) Determinare la controimmagine $f_k^{-1}\{x^2+k\}$ del polinomio x^2+k.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi $U =< (-1,1,1) >$ e $V =< (1,2,0), (-1,-2,1) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp}$.

(b) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp} \cap V$ e di $U + V^{\perp}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ del vettore $(1,4,0)$.

(d) Determinare i vettori di V la cui proiezione ortogonale su U abbia norma $\sqrt{3}$.

Esercizio 3
Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$.

Esercizio 4 Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = (1,-1,1) + < (-1,1,1) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica di r.

(b) Determinare una forma cartesiana di s.

(c) Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s.

(d) Determinare un piano π equidistante da r e s.

(e) Determinare tutti i punti P del piano π tali che si abbia $\mathrm{dist}(r,\pi) = \mathrm{dist}(r,P)$.

Esercizio 5 Si consideri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(b) Determinare i valori di k per cui esiste una base ortonormale di autovettori per f_k e si scriva in tali casi una base ortonormale che diagonalizza f_k.