A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

19 giugno 2014

TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni ed applicarlo alla dimostrazione del fatto che un endomorfismo è iniettivo se e solo se è di rango massimo.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e dimostrare che se α è un autovalore reale di una matrice ortogonale allora $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$.
3. Dare la definizione di rango di una matrice e dimostrare che una matrice e la sua trasposta hanno stesso rango.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = (1+\sqrt{3}i)^2 + \frac{6-2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x,y,z) = (x+y+2z, y+hz, x+hy+2z).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a ϕ_h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$. (1 punto)

(b) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1,1,0)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1,1,0)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k-2 & k+1 \\ 0 & 2k-1 & k \\ 0 & -2k+2 & -k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una base ortonormale di autovettori di B. (2 punti)

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esiste, un valore di $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia simile a B; determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $B = K^{-1}A_{k_0}K$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi

$$U =< (1,1,0),(2,1,-2) > \qquad \text{e} \qquad W =< (0,1,-1),(1,2,-1) >;$$

siano $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e su W rispettivamente.

(a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare ad una base ortonormale di $U + W$. (2 punti)

(b) Determinare $p_W(u)$, con $u = (2,1,-2)$. (1 punti)

(c) Determinare un vettore $w \in W$ tale che $p_U(w) = u$. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||p_U(v)|| = 0$ e $||p_W(v)|| = \sqrt{6}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s = (-1,2,4)+ < (1,1,2) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s. (2 punti)

(b) Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s. (2 punti)

(c) Determinare una retta t incidente sia r che s e di vettore direttore $v = (1,0,-2)$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

19 giugno 2014

TEORIA

1. Dare la definizione di polinomio caratteristico di un endomorfismo e dimostrare che le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori dell'endomorfismo.
2. Enunciare la formula di Grassmann e dimostrare che due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ non possono mai essere in somma diretta.
3. Dare la definizione di prodotto tra matrici e dire a cosa corrisponde tale prodotto in termini di applicazioni lineari.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = (1-\sqrt{3}i)^2 + \frac{6+2\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z) = (x + hy + 2z, y + hz, x + y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a ϕ_h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$. (1 punto)

(b) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(0, 1, 1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(0, 1, 1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k-1 & 0 & k \\ 2k-2 & 1 & k+1 \\ -2k+2 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una base ortonormale di autovettori di B. (2 punti)

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esiste, un valore di $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia simile a B; determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $B = K^{-1}A_{k_0}K$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi

$$U =< (1,0,1),(2,-2,1) > \quad \text{e } W =< (0,-1,1),(1,-1,2) >;$$

siano $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e su W rispettivamente.

(a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare ad una base ortonormale di $U + W$. (2 punti)

(b) Determinare $p_W(u)$, con $u = (2,-2,1)$. (1 punto)

(c) Determinare un vettore $w \in W$ tale che $p_U(w) = u$. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||p_U(v)|| = 0$ e $||p_W(v)|| = \sqrt{6}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s = (-1,-2,-4)+ < (1,-1,-2) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s. (2 punti)

(b) Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s. (2 punti)

(c) Determinare una retta t incidente sia r che s e di vettore direttore $v = (1,0,2)$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

19 giugno 2014

TEORIA

---

1. Enunciare il teorema fondamentale dell'algebra e dimostrare che un polinomio di grado 5 a coefficienti reali ammette una radice reale.
2. dare la definizione di nucleo e immagine di un'applicazione e dimostrare che se $\phi \circ \psi = 0$ allora si ha $\mathrm{Im}(\psi) \subset \ker(\phi)$.
3. Dare la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile e dimostrare che una matrice ortogonalmente diagonalizzabile è simmetrica.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{2\sqrt{3}+6i}{-\sqrt{3}+i} + (1+\sqrt{3}i)^2$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z) = (y + hz, x + hy + 2z, x + y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a ϕ_h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$. (1 punto)

(b) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1, 0, 1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1, 0, 1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k+2 & 0 \\ -k & -2k-1 & 0 \\ -k+1 & -2k-2 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice B è ortogonalemtne diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una base ortonormale di autovettori di B. (2 punti)

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esiste, un valore di $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia simile a B; determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $B = K^{-1} A_{k_0} K$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi

$$U =< (1, 2, -2), (1, 1, 0) > \qquad \text{e} \qquad W =< (2, 1, -1), (1, 0, -1) >;$$

siano $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e su W rispettivamente.

(a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare ad una base ortonormale di $U + W$. (2 punti)

(b) Determinare $p_W(u)$, con $u = (1, 2, -2)$. (1 punto)

(c) Determinare un vettore $w \in W$ tale che $p_U(w) = u$. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||p_U(v)|| = 0$ e $||p_W(v)|| = \sqrt{6}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} -x + y - z = 4 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s = (2, -1, 4)+ < (1, 1, 2) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s. (2 punti)

(b) Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s. (2 punti)

(c) Determinare una retta t incidente sia r che s e di vettore direttore $v = (0, 1, -2)$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

19 giugno 2014

TEORIA

---

1. Enunciare il teorema di Rouché-Capelli e caratterizzare le rette incidenti tramite il teorema di Rouché-Capelli.
2. Dare la definizione di spazio vettoriale finitamente generato e dimostrare che $\mathbb{R}^{\leq 5}[X]$ è finitamente generato.
3. Dare la definizione di matrice simmetrica e dimostrare che una matrice simmetrica con due righe ammette una base ortonormale di autovettori.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{2\sqrt{3} - 6i}{-\sqrt{3} - i} + (1 - \sqrt{3}i)^2$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z) = (-y + hz, x - hy + 2z, x - y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a ϕ_h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$. (1 punto)

(b) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1, 0, 1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1, 0, 1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k+2 \\ 0 & 2k+1 & k+1 \\ 0 & -2k & -k-1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice B è ortogonalemtne diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una base ortonormale di autovettori di B. (2 punti)

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esiste, un valore di $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia simile a B; determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $B = K^{-1} A_{k_0} K$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi

$$U =< (-2, 1, 2), (0, 1, 1) > \quad \text{e } W =< (-1, 2, 1), (-1, 1, 0) >;$$

siano $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su U e su W rispettivamente.

(a) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e completare ad una base ortonormale di $U + W$. (2 punti)

(b) Determinare $p_W(u)$, con $u = (-2, 1, 2)$. (1 punto)

(c) Determinare un vettore $w \in W$ tale che $p_U(w) = u$. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||p_U(v)|| = 0$ e $||p_W(v)|| = \sqrt{6}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ -x - y + z = 4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s = (4, 2, -1)+ < (2, 1, 1) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s. (2 punti)

(b) Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s. (2 punti)

(c) Determinare una retta t incidente sia r che s e di vettore direttore $v = (-2, 0, 1)$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.