A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2014

TEORIA

1. Definire la nozione di isomorfismo tra due spazi vettoriali e dimostrare che gli spazi vettoriali $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{\leq 5}[X]$ sono isomorfi.
2. Definire la nozione di indipendenza lineare tra vettori e dimostrare che due vettori non nulli che siano ortogonali tra di loro sono linearmente indipendenti.
3. Dare la definizione di autovalore di un endomorfismo e dimostrare che se α è un autovalore di ϕ allora α^2 è un autovalore di $\phi \circ \phi$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = \frac{2+2i}{1-i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > \quad \text{e} \quad W = < \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} > .$$

(a) Determinare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (2 punti)

(b) Determinare delle equazioni nelle variabili x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} che definiscano il sottospazio U. (2 punti)

(c) Determinare un sottospazio U' ed un sottospazio W' tali che si abbia

$$U + W = U \oplus U' = W \oplus W'.$$

È possibile avere $U' = W'$? (2 punti)

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_k(x, y, z, w) = (x + z, x + y + kz + (k - 1)w, 2x + ky + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. (2 punti)

(b) Per $k = 0$ determinare una base di $\ker(\Phi_0)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_0)$. (2 punti)

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare una base di $\ker(\Phi_k)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_k)$. (2 punti)

(d) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}\{(0, 1, 0)\}$ del vettore $(0, 1, 0)$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e gli autovalori di B con le loro rispettive molteplicità algebriche. (2 punti)

(b) Determinare una base per ognuno degli autospazi di B. (2 punti)

(c) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $D = H^{-1}BH$. (2 punti)

(d) Le matrici A e B sono simili? In caso affermativo determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $A = K^{-1}BK$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta $r = (0, 1, 0)+ < (0, 1, 1) >$ ed il piano $\pi_\alpha : x + (\alpha + 1)y + \alpha z - 1 = 0$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare una forma cartesiana di r e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, una forma parametrica di π_α. (2 punti)

(b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la posizione reciproca di r e π_α. (2 punti)

(c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la distanza di r da π_α. (2 punti)

(d) Determinare l'intersezione di tutti i piani π_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola __________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2014

TEORIA

---

1. Dare la definizione di autovalore di una matrice e dimostrare che se α è un autovalore di A allora α^3 è un autovalore di $A^3 = AAA$.
2. Definire la nozione di dipendenza lineare tra vettori e dimostrare che tre vettori non nulli che siano linearmente dipendenti non possono essere ortogonali tra di loro.
3. Definire la nozione di isomorfismo tra due spazi vettoriali e dimostrare che gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^{\leq 4}[X]$ e $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ non sono isomorfi.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = \frac{2-2i}{1+i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > \quad \text{e} \quad W = < \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > .$$

(a) Determinare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (2 punti)

(b) Determinare delle equazioni nelle variabili x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} che definiscano il sottospazio U. (2 punti)

(c) Determinare un sottospazio U' ed un sottospazio W' tali che si abbia

$$U + W = U \oplus U' = W \oplus W'.$$

È possibile avere $U' = W'$? (2 punti)

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_k(x, y, z, w) = (x + y + kz + (k-1)w, x + z, 2x + ky + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. (2 punti)

(b) Per $k = 0$ determinare una base di $\ker(\Phi_0)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_0)$. (2 punti)

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare una base di $\ker(\Phi_k)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_k)$. (2 punti)

(d) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}\{(1, 0, 0)\}$ del vettore $(1, 0, 0)$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e gli autovalori di B con le loro rispettive molteplicità algebriche. (2 punti)

(b) Determinare una base per ognuno degli autospazi di B. (2 punti)

(c) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $D = H^{-1}BH$. (2 punti)

(d) Le matrici A e B sono simili? In caso affermativo determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $A = K^{-1}BK$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta $r = (1,0,0) + <(1,0,1)>$ ed il piano $\pi_\alpha : (\alpha+1)x + y + \alpha z - 1 = 0$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare una forma cartesiana di r e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, una forma parametrica di π_α. (2 punti)

(b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la posizione reciproca di r e π_α. (2 punti)

(c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la distanza di r da π_α. (2 punti)

(d) Determinare l'intersezione di tutti i piani π_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2014

TEORIA

1. Definire la nozione di dimensione di uno spazio vettoriale e dimostrare che due spazi vettoriali di dimensione diversa non sono isomorfi.
2. Dare la definizione di isometria di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale e dimostrare che un'isometria è in particolare un isomorfismo.
3. Dare la definizione di autovettore di un endomorfismo e dimostrare che se v è un autovettore di ϕ allora è un autovettore di $\phi + id$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = \frac{1+i}{3-3i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = < \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > \quad \text{e} \quad W = < \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} > .$$

(a) Determinare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (2 punti)

(b) Determinare delle equazioni nelle variabili x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} che definiscano il sottospazio U. (2 punti)

(c) Determinare un sottospazio U' ed un sottospazio W' tali che si abbia

$$U + W = U \oplus U' = W \oplus W'.$$

È possibile avere $U' = W'$? (2 punti)

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_k(x, y, z, w) = (x + z, x + y + (k + 1)z + kw, 2x + (k + 1)y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. (2 punti)

(b) Per $k = 0$ determinare una base di $\ker(\Phi_0)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_0)$. (2 punti)

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare una base di $\ker(\Phi_k)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_k)$. (2 punti)

(d) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}\{(0, 1, 0)\}$ del vettore $(0, 1, 0)$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e gli autovalori di B con le loro rispettive molteplicità algebriche. (2 punti)

(b) Determinare una base per ognuno degli autospazi di B. (2 punti)

(c) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $D = H^{-1}BH$. (2 punti)

(d) Le matrici A e B sono simili? In caso affermativo determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $A = K^{-1}BK$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta $r = (0,1,0)+ < (0,1,-1) >$ ed il piano $\pi_\alpha : x + \alpha y - (\alpha - 1)z - 1 = 0$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare una forma cartesiana di r e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, una forma parametrica di π_α. (2 punti)

(b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la posizione reciproca di r e π_α. (2 punti)

(c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la distanza di r da π_α. (2 punti)

(d) Determinare l'intersezione di tutti i piani π_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2014

TEORIA

---

1. Definire la nozione di sottospazio di uno spazio vettoriale e dimostrare che un sottospazio di uno spazio vettoriale finitamente generato è uno spazio vettoriale finitamente generato.
2. Definire la nozione di ortogonalità tra vettori di $\mathbb{R}^n$ e dimostrare che se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori non nulli e a due a due ortogonali essi sono linearmente indipendenti.
3. Dare la definizione di autovettore di una matrice e dimostrare che una matrice A tale che $AA = -I$ non ha autovettori relativi ad autovalori reali.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = \frac{1-i}{3+3i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U =< \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) > \quad \text{e} \quad W =< \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) > .$$

(a) Determinare una base di $U \cap W$ e completarla ad una base di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (2 punti)

(b) Determinare delle equazioni nelle variabili x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} che definiscano il sottospazio U. (2 punti)

(c) Determinare un sottospazio U' ed un sottospazio W' tali che si abbia

$$U + W = U \oplus U' = W \oplus W'.$$

È possibile avere $U' = W'$? (2 punti)

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_k(x, y, z, w) = (x + z, 2x + (k + 1)y + 2z, x + y + (k + 1)z + kw).$$

(a) Determinare la matrice A_k associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. (2 punti)

(b) Per $k = 0$ determinare una base di $\ker(\Phi_0)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_0)$. (2 punti)

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare una base di $\ker(\Phi_k)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\Phi_k)$. (2 punti)

(d) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\Phi_k^{-1}\{(0, 0, 1)\}$ del vettore $(0, 0, 1)$. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e gli autovalori di B con le loro rispettive molteplicità algebriche. (2 punti)

(b) Determinare una base per ognuno degli autospazi di B. (2 punti)

(c) La matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $D = H^{-1}BH$. (2 punti)

(d) Le matrici A e B sono simili? In caso affermativo determinare una matrice invertibile K tale che si abbia $A = K^{-1}BK$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta $r = (0,0,1)+ < (0,-1,1) >$ ed il piano $\pi_\alpha : x - \alpha y + (\alpha+1)z - 1 = 0$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare una forma cartesiana di r e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, una forma parametrica di π_α. (2 punti)

(b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la posizione reciproca di r e π_α. (2 punti)

(c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la distanza di r da π_α. (2 punti)

(d) Determinare l'intersezione di tutti i piani π_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.