Appello del 19/6/2014 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^3 = (1+\sqrt{3}\,i)^2 + \frac{6-2\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} = -2+2\sqrt{3}\,i + \frac{-2\sqrt{3}\,i\,(1+\sqrt{3}\,i)}{1+\sqrt{3}\,i}$$

$$= -2 = 2\,(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Per de Moivre

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k=0,1,2$$

le soluzioni distinte sono:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

Esercizio 2:

(a) $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & h \\ 1 & h & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\det A_h = 2 - h^2 + h - 2 = -h(h-1)$

dunque ϕ_h è invertibile per $h \neq 0,1$

cioè $\ker \phi_h = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\operatorname{Im} \phi_h = \mathbb{R}^3$ per $h \neq 0,1$.

una base di $\ker \phi_h$ è $\emptyset$ e una base di $\operatorname{Im} \phi_h$ è $\mathcal{E}_3$,

per $h \neq 0,1$.

caso $h=0$.

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

dunque $\ker \phi_0 = \langle (2,0,-1) \rangle$ e $\operatorname{Im} \phi_0 = \langle (1,0,1), (1,1,0) \rangle$;

$\dim \ker \phi_0 = 1$ e $\dim \operatorname{Im} \phi_0 = 2$.

caso $h=1$.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

dunque $\ker \phi_1 = \langle (1,1,-1) \rangle$ e $\operatorname{Im} \phi_1 = \langle (1,0,1), (1,1,1) \rangle$;

$\dim \ker \phi_1 = 1$ e $\dim \operatorname{Im} \phi_1 = 2$.

(c) Si ha $(1,1,0) \notin \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle = \operatorname{Im} \phi_1$,

dunque $\phi_1^{-1}\{(1,1,0)\} = \emptyset$.

Si ha $(1,1,0) \in \langle (1,0,1),(1,1,0) \rangle = \operatorname{Im} \phi_0$

inoltre $\phi_0(0,1,0) = (1,1,0)$, dunque

$\phi_0^{-1}\{(1,1,0)\} = (0,1,0) + \ker \phi_0 = (0,1,0) + \langle (2,0,-1) \rangle$.

caso generale, $h \neq 0,1$

Risolviamo il sistema lineare di matrice completa

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 1 & h & 2 & 0 \end{matrix}$$

; riducendo il sistema a scala

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 1 & h & 2 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+(1-h)\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h(1-h) & -h \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{h}\mathrm{III}} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h-1 & 1 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + hz = 1 \\ (h-1)z = 1 \end{cases}$$

dunque $\phi_h^{-1}\{(1,1,0)\} = \left(\frac{h-2}{h-1}, \frac{-1}{h-1}, \frac{1}{h-1} \right)$. $\left(\begin{matrix} \text{per} \\ h \neq 0,1 \end{matrix} \right)$

Esercizio 3 :

(a) B è simmetrica dunque ortogonalmente diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di B è

$$P(t) = \det(B - tI_3) = (1-t)(t^2-1) = -(t-1)^2(t+1)$$

Gli autovalori di B sono: 1 di molt. alg. 2 e
-1 di molt. alg. 1

i relativi autospazi sono:

$$V_1 = \ker(B - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$$

$$V_{-1} = \ker(B + I_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

Ortonormalizzando le basi $\{(1,0,0), (0,1,1)\}$ di V_1 e $\{(0,1,-1)\}$ di V_{-1} si ottiene la base ortonormale $\left\{ (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \right\}$ di autovettori di B.

(b) Il polinomio caratteristico di A_k è

$$P(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2k-2 & k+1 \\ 0 & 2k-1-t & k \\ 0 & -2k+2 & -k-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\left((2k-1-t)(-k-t) + k(2k-2)\right)$$

$$= (1-t)\left(t^2 + (-k+1)t - k\right)$$

$$= (1-t)(t+1)(t-k)$$

dunque

per $k \neq 1, -1$

gli autovalori di A_k sono: 1 di molt. alg. 1
-1 di molt. alg. 1
k di molt. alg. 1

per $k = 1$
gli autovalori di A_1 sono: 1 di molt. alg. 2
-1 di molt. alg. 1

per $k = -1$
gli autovalori di A_{-1} sono: 1 di molt. alg. 1
-1 di molt. alg. 2

(c) Poiché per $k \neq 1, -1$ A_k ha tre autovalori distinti, A_k è diagonalizzabile per $k \neq 1, -1$.

caso $k = 1$

Calcoliamo la molteplicità geometrica di 1 come autovalore di A_1.

$$V_1 = \ker(A_1 - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

la molt. geom. di 1 come autovalore di A_1 è 2, dunque A_1 è diagonalizzabile.

caso $k = -1$

Calcoliamo la molteplicità geometrica di -1 come autovalore di A_{-1}.

$$V_{-1} = \ker(A_{-1} + I_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \langle (2,1,-2) \rangle$$

la molteplicità geometrica di -1 come autovalore di A_{-1} è 1, dunque A_{-1} non è diagonalizzabile.

(d) B è simile alla matrice diagonale $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

più precisamente si ha

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

L'unica matrice A_k diagonalizzabile con autovettori 1 di molt. alg. 2 e -1 di molt. alg. 1 è A_1.

Cerchiamo una base di autovettori di A_1

$$V_1 = \ker(A_1 - I_3) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

$$V_{-1} = \ker(A_1 + I_3) = \ker \begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \langle (2,1,-2) \rangle$$

dunque si ha

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Unendo le due uguaglianze si ottiene

$$B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1} A_1 \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

Quindi $k_0 = 1$ e

$$K = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&1/2\\0&1/2&-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Esercizio 4:

(a) Si ha $U: 2x-2y+z=0$

Intersecando con W si ottiene

$$U \cap W = \{ \alpha(0,1,-1)+\beta(1,2,-1) \mid 2x-2y+z=0 \}$$

Risolvendo il sistema in α, β si ottiene $-3\alpha-3\beta=0$

dunque $U \cap W = \langle (0,1,-1)-(1,2,-1) \rangle = \langle (-1,-1,0) \rangle$

$$= \langle (1,1,0) \rangle .$$

Una base ortonormale di $U \cap W$ è $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \}$

Per completare tale base ad una base ortonormale di $U+W=\mathbb{R}^3$, calcoliamo $(U \cap W)^\perp = \langle (1,1,0) \rangle^\perp$

Si ha $\langle (1,1,0) \rangle^\perp = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$

Una base ortonormale di $(U \cap W)^\perp$ è

$\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1) \}$, dunque un completamento della base $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \}$ di $U \cap W$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3 = U+W$ è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1) \right\}.$$

(b) Si ha $W^\perp = \langle (-1,1,1) \rangle$, una base ortonormale di $W^\perp$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right\}$, dunque si ha

$$p_W(u) = p_W(2,1,-2) = (2,1,-2) - \left((2,1,-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right) \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

$$= (2,1,-2) + (-1,1,1) = (1,2,-1)$$

(c) Poiché $p_U(v) = u$, si ha

$$v = u + \alpha(2,-2,1) \quad \left(\text{poiché } p_U^{-1}\{u\} = u + U^\perp \text{ e } U^\perp = \langle (2,-2,1) \rangle \right)$$

Dunque $v = (2,1,-2) + \alpha(2,-2,1)$,

imponendo $v \in W$ si ottiene il sistema

$-3 - 3\alpha = 0 \quad$ (si ha $W : -x + y + z = 0$)

dunque $\alpha = -1$ e quindi

$$v = (2,1,-2) - (2,-2,1) = (0,3,-3).$$

(d) Poiché $\| p_U(v) \| = 0$ si ha $p_U(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$

cioè $v \in U^\perp$, ossia $v = \alpha(2,-2,1)$.

Determiniamo $p_W(v)$.

Si ha $p_W(v) = p_W(\alpha(2,-2,1)) = \alpha\, p_W(2,-2,1)$

dunque $\| p_W(v) \| = |\alpha| \cdot \| p_W(2,-2,1) \|$.

Determiniamo quindi $p_W(2,-2,1)$.

Si ha

$$p_W(2,-2,1) = (2,-2,1) - \left((2,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right) \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) =$$

$$= (2,-2,1) + (-1,1,1) = (1,-1,2)$$

dunque $\| p_W(v) \| = |\alpha| \cdot \| (1,-1,2) \| = |\alpha| \cdot \sqrt{6}$

Segue che $\| p_W(v) \| = \sqrt{6}$ equivale a $\alpha = \pm 1$

Quindi tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che

$\| p_U(v) \| = 0$ e $\| p_W(v) \| = \sqrt{6}$ sono

$v = (2,-2,1)$ oppure $v = (-2,2,-1)$.

Esercizio 5:

(a) Risolviamo il sistema che definisce r.

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{matrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{matrix}$$

per $z=-1$ si ottiene la soluzione particolare $(3,0,-1)$

per $z =$ [redacted] -3 si ottiene la seguente soluzione dell'equazione omogenea associata: $(-2,1,-3)$

Dunque si ha $r = (3,0,-1) + \langle (-2,1,-3) \rangle$

Eliminiamo il parametro α dalla forma parametrica di s:

$$s: \begin{matrix} x = -1+\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 4+2\alpha \end{matrix}$$

Si ottiene

$$s: \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - z = -6 \end{cases}.$$

(b) Si ha

$$r = (3,0,-1) + \langle (2,-1,3) \rangle \quad e \quad s = (-1,2,4) + \langle (1,1,2) \rangle$$

dunque r e s non sono parallele.

Inoltre $(3,0,-1) - (-1,2,4) = (4,-2,-5)$

E quindi

$$\text{dist}(r,s) = \frac{|(4,-2,-5) \cdot ((2,-1,3) \times (1,1,2))|}{\|(2,-1,3) \times (1,1,2)\|}$$

$$= \frac{|(4,-2,-5) \cdot (-5,-1,3)|}{\|(-5,-1,3)\|}$$

$$= \frac{|-33|}{\sqrt{35}} = \frac{33}{\sqrt{35}} \neq 0$$

dunque r e s sono sghembe.

(c)

Poiché t è incidente con r e s si ha che t è complanare sia con r che con s, dunque

$$t = \pi_1 \cap \pi_2$$

con $\pi_1 = (3,0,-1) + \langle (2,-1,3), (1,0,-2) \rangle$

e $\pi_2 = (-1,2,4) + \langle (1,1,2), (1,0,-2) \rangle$

Determiniamo le equazioni di π_1 e π_2.

Si ha $(2,-1,3) \times (1,0,-2) = (2,7,1)$

e $(1,1,2) \times (1,0,-2) = (-2,4,-1)$

dunque $\pi_1 : 2x + 7y + z - 5 = 0$

e $\pi_2 : -2x + 4y - z - 6 = 0$

Segue che

$$t : \begin{cases} 2x + 7y + z - 5 = 0 \\ -2x + 4y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$t = (-1,1,0) + \langle (1,0,-2) \rangle .$$