Appello del 16/9/2014 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)^2 + \frac{7-\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2i + \frac{(7-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}{4} =$$

$$= \sqrt{3}\,i + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,i = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$= 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Dunque per De Moivre si ha:

$$z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right), \quad k = 0,1$$

Si ottengono le seguenti soluzioni distinte:

$$z_0 = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_1 = -\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Esercizio 2:

(a) L'insieme $\mathcal{V} = \{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ (è un insieme generatore di $\mathbb{R}^4$ con quattro elementi).

Esprimiamo $(1,0,-1,-1)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{V}$.

$$(1,0,-1,-1) = \alpha\,(1,-1,0,0) + \beta\,(0,1,-1,0) + \gamma\,(0,0,1,0) + \delta\,(0,0,0,1)$$

Risolvendo il sistema che ne deriva si ottiene

$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0,\ \delta = -1$

Cioè $(1,0,-1,-1) = (1,-1,0,0) + (0,1,-1,0) - (0,0,0,1)$

Dunque

$$\phi_h(1,0,-1,-1) = \phi_h(1,-1,0,0) + \phi_h(0,1,-1,0) - \phi_h(0,0,0,1) =$$

$$= (1,2,-1) + (-1,h,-1) - (0,h+2,-2) =$$

$$= (0,0,0)$$

(b) Si ha

$$\phi_1(1,-1,0,0) = (1,2,-1),\ \phi_1(0,1,-1,0) = (-1,1,-1),$$

$$\phi_1(0,0,1,0) = (1,2,-1),\ \phi_1(0,0,0,1) = (0,3,-2)$$

Poiché $\mathcal{V}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ segue

$$\mathrm{Im}\,\phi_1 = \langle (1,2,-1), (-1,1,-1), (1,2,-1), (0,3,-2) \rangle$$

Poiché $(1,2,-1) + (-1,1,-1) = (0,3,-2)$ si ha

$$\mathrm{Im}\,\phi_1 = \langle (1,2,-1), (-1,1,-1) \rangle$$

e $\{(1,2,-1), (-1,1,-1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\,\phi_1$.

Abbiamo visto che $\phi_h(1,0,-1,-1) = (0,0,0)\ \forall h \in \mathbb{R}$,

dunque $(1,0,-1,-1) \in \ker \phi_1$.

Inoltre, poiché $\phi_1(1,-1,0,0) = \phi_1(0,0,1,0)$

si ha $\phi_1((1,-1,0,0) - (0,0,1,0)) = (0,0,0)$,

cioè $(1,-1,-1,0) \in \ker\phi_1$

Poiché $\dim \mathrm{Im}\,\phi_1 = 2$, per il teorema delle dimensioni si ha $\dim \ker\phi_1 = 2$.

Da cui segue, essendo $(1,0,-1,-1)$ e $(1,-1,-1,0)$ lin. ind., che $\{(1,0,-1,-1), (1,-1,-1,0)\}$ è una base di $\ker \phi_1$.

(c) Poiché $\mathcal{V}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ segue

$$\operatorname{Im}\phi_h = \langle (1,2,-1), (-1,h,-1), (h,2,h-2), (0,h+2,-2) \rangle$$

Troviamo una base di $\operatorname{Im}\phi_h$ usando le operazioni elementari sui generatori di $\operatorname{Im}\phi_h$.

$$\operatorname{Im}\phi_h = \langle (1,2,-1), (0,h+2,-2), (0,2-2h,2h-2), (0,h+2,-2) \rangle$$

$$= \langle (1,2,-1), (0,h+2,-2), (0,2-2h,2h-2) \rangle$$

Il caso $h=1$ è stato già trattato al punto (b).

Nel caso $h \neq 1$ si ha $(0,2-2h,2h-2) = (2-2h)(0,1,-1)$,

dunque, per $h \neq 1$, si ha

$$\operatorname{Im}\phi_h = \langle (1,2,-1), (0,1,-1), (0,h+2,-2) \rangle$$

$$= \langle (1,2,-1), (0,1,-1), (0,h,0) \rangle$$

Per $h \neq 0$ questi generatori sono lin. ind., dunque

$\operatorname{Im}\phi_h = \mathbb{R}^3$ e $\ker\phi_h = \langle (1,0,-1,-1) \rangle$ per $h \neq 0,1$.

Una base di $\operatorname{Im}\phi_h$ per $h \neq 0,1$ è ad esempio la base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$; una base di $\ker\phi_h$ è $\{(1,0,-1,-1)\}$.

Per $h=0$, una base di $\operatorname{Im}\phi_0$ è $\{(1,2,-1),(0,1,-1)\}$, dunque $\dim\ker\phi_0 = 2$. Si vede facilmente che $\phi_0(0,0,1,-1) = (0,0,0)$, dunque

$\{(1,0,-1,-1),(0,0,1,-1)\}$ è una base di $\ker \phi_0$.

Riassumendo, ϕ_h non è suriettiva per $h=0,1$.

(d)

caso $h \neq 0,1$.

Si ha $(1,-1,1) = \frac{1}{h}\Big((h,2,h-2)-(0,h+2,-2)\Big)$

Dunque

$$\phi_h^{-1}(1,-1,1) = \frac{1}{h}(0,0,1,-1) + \langle (1,0,-1,-1) \rangle$$

caso $h=0$.

Si verifica facilmente che $(1,-1,1) \notin \langle (1,2,-1),(0,1,-1)\rangle = \mathrm{Im}\,\phi_0$,

dunque

$$\phi_0^{-1}(1,-1,1) = \emptyset$$

caso $h=1$.

Si ha $(1,-1,1) = -(-1,1,-1) = -\phi_1(0,1,-1,0) = \phi_1(0,-1,1,0)$,

dunque

$$\phi_1^{-1}(1,-1,1) = (0,-1,1,0) + \langle (1,0,-1,-1),(1,-1,-1,0)\rangle.$$

Esercizio 3 :

(a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_k.

$$P_k(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} k-1-t & 0 & 0 \\ 0 & k+3-t & 1 \\ 0 & -2(k+1)^2 & -2k-t \end{pmatrix}$$

$$= \left((k-1)-t\right)\cdot\left(t^2+(k-3)t-2k^2-6k+2(k+1)^2\right)$$

$$= \left((k-1)-t\right)\cdot\left(t^2+(k-3)t-2k+2\right) =$$

$$= \left((k-1)-t\right)(t-2)\left(t+(k-1)\right) =$$

$$= -\left(t-(k-1)\right)\left(t+(k-1)\right)(t-2)$$

Dunque A_k ha i seguenti autovalori con le seguenti molteplicità algebriche :

$k \neq -1, 1, 3$.

A_k ha autovalori $2, k-1, 1-k$ tutti di molt. alg. 1

$k = -1$.

A_{-1} ha autovalori : 2 di molt. alg. 2 , -2 di molt. alg. 1

$k = 1$.

A_1 ha autovalori : 0 di molt. alg. 2 , 2 di molt. alg. 1

$k = 3$.

A_3 ha autovalori : 2 di molt. alg. 2 , -2 di molt. alg. 1

(b) Per $k \neq -1, 1, 3$, A_k è diagonalizzabile poiché ha 3 autovalori distinti.

Studiamo la diagonalizzabilità di A_k nei casi $k = -1, 1, 3$.

$k = -1$.

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'autospazio di A_{-1} relativo all'autovalore 2 è:

$$V_2 = \ker (A_{-1} - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle$$

$\dim V_2 = 1 < 2$. Dunque A_{-1} non è diagonalizzabile.

$k = 1$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

L'autospazio di A_1 relativo all'autovalore 0 è:

$$V_0 = \ker A_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,-4) \rangle$$

$\dim V_0 = 2$, dunque A_1 è diagonalizzabile.

$k = 3$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

L'autospazio di A_3 relativo all'autovalore 2 è:

$$\ker (A_3 - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -32 & -8 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,-4) \rangle$$

$\dim V_2 = 2$, dunque A_3 è diagonalizzabile.

Riassumendo, A_k è diagonalizzabile per $k \neq -1$.

(c) Per il teorema spettrale, A_k è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se A_k è simmetrica.

Dunque A_k è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $-2(k+1)^2 = 1$

Ma questa uguaglianza non è mai verificata per k reale, dunque A_k non è mai ortogonalmente diagonalizzabile.

(d) Due matrici diagonalizzabili sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Cerchiamo quindi k_1, k_2 distinti tali che A_{k_1} e A_{k_2} abbiano stesso polinomio caratteristico e siano entrambe diagonalizzabili.

Ad esempio $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ soddisfano queste condizioni:

A_0 e A_2 sono diagonalizzabili ed hanno entrambe polinomio caratteristico $P(t) = -(t-2)(t-1)(t+1)$

Esercizio 4 :

(a) Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai generatori $(1,0,2)$, $(1,1,3)$ di V.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$$

$$u_2' = (1,1,3) - \left((1,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) =$$

$$= (1,1,3) - \frac{7}{5}(1,0,2) = \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}(-2,5,1)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1).$$

Dunque $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1)\right\}$ è una base ortonormale di V.

(b) Si ha $\langle v\rangle^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-4y+2z=0\}$.

Dunque $\langle v\rangle^{\perp} = \langle (4,3,0), (0,1,2)\rangle$ e

$\{(4,3,0), (0,1,2)\}$ è una base di $\langle v\rangle^{\perp}$.

(c) Si ha $U^\perp = \langle (2,1,-1) \rangle$, dunque

$$p_U(v) = (3,-4,2) - \left((3,-4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)$$

$$= (3,-4,2)$$

Quindi $p_U(3,-4,2) = (3,-4,2)$, ossia $v \in U$.

(d) La condizione $p_U(w) = p_U(v)$ equivale a

$$w = (3,-4,2) + \alpha(2,1,-1) = (3+2\alpha, \alpha-4, 2-\alpha)$$

dunque $\|w\| = \sqrt{35}$ ~~[illegible]~~ implica

$$(3+2\alpha)^2 + (\alpha-4)^2 + (2-\alpha)^2 = 35$$

da cui

$$6\alpha^2 + 29 = 35 \qquad \text{ossia} \qquad \alpha = \pm 1$$

Si conclude che i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ tali che $p_U(w) = p_U(v)$ e $\|w\| = \sqrt{35}$

sono $(5,-3,1)$ e $(1,-5,3)$.

Esercizio 5:

(a) Si ha $\langle (1,1,0),(1,0,-1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$;

sostituendo $(0,0,1)$ nell'equazione $x-y+z=0$

si ottiene

$$\pi : \ x-y+z-1=0 .$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

si ottiene $r = (0,1,0) + \langle (0,1,1) \rangle$.

(b) Un punto di r è del tipo $(0,1+t,t)$ per un qualche valore di $t \in \mathbb{R}$.

La condizione $\mathrm{dist}\big((0,1+t,t),(1,0,1)\big) = \sqrt{5}$ equivale a

$$1+(1+t)^2+(t-1)^2=5$$

ossia $2t^2+3=5$ cioè $t=\pm 1$.

Si conclude che ci sono due punti di r a distanza $\sqrt{5}$ da P: sono i punti $(0,2,1)$ e $(0,0,-1)$.

(c) Poiché $(0,1,1) = (1,1,0) - (1,0,-1)$, la retta r è parallela al piano π.

Dunque $\text{dist}(r,\pi) = \text{dist}((0,1,0),\pi) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{3}}$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(d) Si ha $\pi' = (0,1,0) + \langle (0,1,1), (1,-1,1) \rangle$,

dunque $\pi' : 2x + y - z - 1 = 0$

Segue che $r' : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema si ottiene $r' = (2/3, -1/3, 0) + \langle (0,1,1) \rangle$.

Le rette r ed r' sono parallele.
Calcoliamo $\text{dist}(r,r')$. Si ha $\text{dist}(r,r') = \text{dist}((0,1,0),r')$ poiché r ed r' sono parallele.

Troviamo la proiezione ortogonale su $\langle (0,1,1) \rangle^{\perp}$ del vettore $(2/3, -1/3, 0) - (0,1,0) = (2/3, -4/3, 0)$:

$$\frac{2}{3}(1,-2,0) - \left(\frac{2}{3}(1,-2,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, 0\right) + \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1,-1,1)$$

Dunque la distanza tra r e r' è $\text{dist}(r,r') = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.