A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

21 Settembre 2015

TEORIA

1. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette dello spazio euclideo tali che r_1 sia ortogonale sia a r_2 e r_2 sia ortogonale a r_3. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche tra le rette r_1, r_2, r_3.
2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 - 1$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi + Id$, dove Id denota l'endomorfismo identità di $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{i}{i^5} + \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (1,1,0,0),(0,1,0,1) > , V =< (2,1,0,-1),(1,0,1,0) > .$$

(a) Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio U.

(b) Determinare una base di $U \cap V$ e completarla ad una base di $U + V$.

(c) Determinare un sottopsazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia:

$$\mathbb{R}^4 = W \bigoplus (U \cap V) \quad \text{e} \quad W \cap U = \{(0,0,0,0)\}.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $(-1,3,-1)$ è autovettore della matrice A_k. Esiste un k_0 tale che $(-1,3,-1)$ sia autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore 3?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Determinare un $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U =< (1,-1,0),(0,1,-1) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (1,-2,1)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U.

(c) Determinare tutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) =< (1,-2,1) > .$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta

$$r_a : \begin{cases} -x+y+z = 1-2a \\ -2ax+y+2z = 2a(1-2a) \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, e la retta

$$s = (1,0,0)+ < (1,2,-1) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica della retta r_a ed una forma cartesiana della retta s.

(b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca delle rette r_a e s.

(c) Determinare la distanza tra la retta r_0 e la retta s.

(d) Determinare una retta t che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia complanare alla retta r_a.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

21 Settembre 2015

TEORIA

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2+t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi + Id$, dove Id denota l'endomorfismo identità di $\mathbb{R}^2$.

2. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette dello spazio euclideo tali che r_3 sia ortogonale sia a r_1 che a r_2. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche tra le rette r_1, r_2, r_3.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} + \frac{i}{i^5}$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1) > , V =< (2, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) > .$$

(a) Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio U.

(b) Determinare una base di $U \cap V$ e completarla ad una base di $U + V$.

(c) Determinare un sottopsazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia:

$$\mathbb{R}^4 = W \bigoplus (U \cap V) \quad \text{e} \quad W \cap U = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $(-1, -1, 3)$ è autovettore della matrice A_k. Esiste un k_0 tale che $(-1, -1, 3)$ sia autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore 3?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Determinare un $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U =< (-1, 0, -1), (0, -1, 1) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (-1, 1, -2)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U.

(c) Determinaretutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) =< (-1, 1, -2) > .$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta

$$r_a : \begin{cases} x + y + z = 1 + 2a \\ -2ax + 2y + z = -2a(1 + 2a) \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, e la retta

$$s = (-1, 0, 0)+ < (-1, -1, 2) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica della retta r_a ed una forma cartesiana della retta s.

(b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca delle rette r_a e s.

(c) Determinare la distanza tra la retta r_0 e la retta s.

(d) Determinare una retta t che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia complanare alla retta r_a.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

21 Settembre 2015

TEORIA

1. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette dello spazio euclideo tali che r_2 sia ortogonale sia a r_1 che a r_3. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche tra le rette r_1, r_2, r_3.
2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 - 2t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi + Id$, dove Id denota l'endomorfismo identità di $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{i^2}{i^6} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}.$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (-1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) > \quad , \quad V =< (-2, 1, -1, 0), (-1, 0, 0, 1) > .$$

(a) Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio U.

(b) Determinare una base di $U \cap V$ e completarla ad una base di $U + V$.

(c) Determinare un sottopsazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia:

$$\mathbb{R}^4 = W \bigoplus (U \cap V) \quad \text{e} \quad W \cap U = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ k-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $(-1, 3, -1)$ è autovettore della matrice A_k. Esiste un k_0 tale che $(-1, 3, -1)$ sia autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore 3?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Determinare un $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U =< (0,1,1), (-1,-1,0) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (1,2,1)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U.

(c) Determinare tutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) =< (1,2,1) > .$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta

$$r_a : \begin{cases} x - y - z = 1 - 2a \\ 2x - y - 2az = 2a(1-2a) \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, e la retta

$$s = (0,0,1)+ < (-1,-2,1) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica della retta r_a ed una forma cartesiana della retta s.

(b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca delle rette r_a e s.

(c) Determinare la distanza tra la retta r_0 e la retta s.

(d) Determinare una retta t che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia complanare alla retta r_a.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

21 Settembre 2015

TEORIA

---

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 + 3t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi + Id$, dove Id denota l'endomorfismo identità di $\mathbb{R}^2$.

2. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette dello spazio euclideo tali che r_1 sia ortogonale sia a r_2 che a r_3. Elencare le possibili posizioni reciprocche delle rette r_1, r_2, r_3.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} - \frac{i}{i^5}.$$

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (0, -1, 0, 1), (1, -1, 0, 0) > , V =< (-1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 1) > .$$

(a) Determinare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio U.

(b) Determinare una base di $U \cap V$ e completarla ad una base di $U + V$.

(c) Determinare un sottopsazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia:

$$\mathbb{R}^4 = W \bigoplus (U \cap V) \qquad \text{e} \qquad W \cap U = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori del parametro k per i quali il vettore $(3, -1, -1)$ è autovettore della matrice A_k. Esiste un k_0 tale che $(3, -1, -1)$ sia autovettore di A_{k_0} relativo all'autovalore 3?

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori ed autospazi di A_k. Per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile?

(c) Determinare un $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_1} sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Tale k_1 è unico?

(d) Determinare una matrice invertibile H tale che si abbia $B = H^{-1} A_{k_1} H$.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U =< (-1,1,0),(1,0,1) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (-2,1,-1)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U.

(c) Determinare tutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) =< (-2,1,-1) > .$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta

$$r_a : \begin{cases} x - y - z = 1 + 2a \\ x + 2ay - 2z = -2a(1 + 2a) \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, e la retta

$$s = (0,1,0)+ < (2,1,1) > .$$

(a) Determinare una forma parametrica della retta r_a ed una forma cartesiana della retta s.

(b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca delle rette r_a e s.

(c) Determinare la distanza tra la retta r_0 e la retta s.

(d) Determinare una retta t che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia complanare alla retta r_a.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.