Risoluzione esercizi dell'appello del 23/6/2016 (traccia A)

Esercizio 1:

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)x^4+(6+9i)x=\left[\left(\frac{1}{2}(5+i)\right)x^3+3(2+3i)\right]\cdot x$$

Dunque le radici di tale polinomio sono le soluzioni

dell'equazione $\frac{1}{2}(5+i)x^3+3(2+3i)=0$

e $x=0$.

Risolviamo quindi l'equazione suscritta:

$$x^3=-6\,\frac{2+3i}{5+i}=-6\,\frac{(2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=-6\,\frac{13+13i}{26}$$

ossia

$$x^3=-3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

per De Moivre si ha che le soluzioni sono

$$x_k=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

per $k=0,1,2$

Le radici del polinomio di partenza sono quindi:

$0,\ x_0,\ x_1,\ x_2$

Esercizio 2:

(a) Esprimiamo $(1,2,0,0)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{V}$:

$$(1,2,0,0) = a(1,0,0,-1) + b(0,1,-1,0) + c(0,0,1,-1) + d(0,0,0,1)$$

Risolvendo il sistema lineare che ne consegue si ottiene

$$(1,2,0,0) = (1,0,0,-1) + 2(0,1,-1,0) + 2(0,0,1,-1) + 3(0,0,0,1)$$

Dunque

$$\phi(1,2,0,0) = (1,-1,0) + 2(0,1,-1) + 2(1,-2,1) = (3,-3,0)$$

(b) Esprimendo i vettori della base canonica $\mathcal{E}_4$ in termini dei vettori della base $\mathcal{V}$ si ottiene:

$$(1,0,0,0) = (1,0,0,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,1,0,0) = (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,0,1,0) = (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$$

segue che

$$\phi(1,0,0,0) = (1,-1,0)$$
$$\phi(0,1,0,0) = (0,1,-1) + (1,-2,1) = (1,-1,0)$$
$$\phi(0,0,1,0) = (1,-2,1)$$
$$\phi(0,0,0,1) = (0,0,0)$$

Dunque $$A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Dal punto (b) vediamo che $\mathrm{Im}\,\phi = \langle (1,-1,0), (1,-2,1) \rangle$

Verifichiamo se $(2,-1,-1) \in \mathrm{Im}\,\phi$:

Studiando il sistema lineare derivante da

$$(2,-1,-1) = a(1,-1,0) + b(1,-2,1)$$

si vede che il sistema è risolubile ed ammette l'unica soluzione $(a,b) = (3,-1)$

segue che $(2,-1,-1) = 3(1,-1,0) - (1,-2,1)$

da ciò si deduce che $\phi(3,0,-1,0) = (2,-1,-1)$

Per Rouché-Capelli si ha

$$\phi^{-1}(\{(2,-1,-1)\}) = (3,0,-1,0) + \ker\phi$$

Per il teorema delle dimensioni $\dim \ker\phi = 2$

osservando quindi che $(1,-1,0,0)$ e $(0,0,0,1)$ appartengono a $\ker\phi$, si conclude che $\ker\phi = \langle (1,-1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$.

Dunque $\phi^{-1}(\{(2,-1,-1)\}) = (3,0,-1,0) + \langle (1,-1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$.

(d) i vettori $v \in \langle (1,0,0,-1), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1) \rangle$ tali che $\phi(v) = (0,0,0)$ sono i vettori del sottospazio

$$\langle (1,0,0,-1), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1) \rangle \cap \ker\phi$$

Determinando questo sottospazio si conclude che i vettori in questione sono i multipli di $(1,-1,0,0)$

ossia $v \in \langle (1,-1,0,0) \rangle$.

Esercizio 3:

(a) A_k è invertibile se e solo se $\det A_k \neq 0$

$$\det A_k = -4\left(9-(2k-3)^2\right) = -4\cdot 2k\cdot(6-2k)$$

dunque A_k è invertibile per $k \neq 0, 3$

(b) Polinomio caratteristico di A_k:

$$P_{A_k}(t) = \det(A_k - tI_3) = -(t+4)\left((t+3)^2-(2k-3)^2\right)$$

$$= -(t+4)(t+2k)(t-(2k-6))$$

Le radici di $P_{A_k}(t)$ sono $-4, -2k, 2k-6$

sono distinte per $k \neq 2, 1, 3/2$

Si conclude che gli autovalori di A_k sono:

per $k \neq 1, 2, 3/2$: $-4, -2k, 2k-6$ tutti di molt. alg. 1

per $k=1$: -4 di molt. alg. 2 , -2 di molt. alg. 1

per $k=2$: -4 di molt. alg. 2 , -2 di molt. alg. 1

per $k=3/2$: -4 di molt. alg. 1 , -3 di molt. alg. 2

(c) Poiché A_k ha tutti autovalori reali, è sufficiente verificare che molteplicità geometrica e molteplicità algebrica coincidano per ogni autovalore

Inoltre è sufficiente fare tale verifica nei casi in cui la molteplicità algebrica sia 2.

per $k = 1$

$$rk(A_1 + 4I_3) = rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

dunque $\dim V_{-4} = 3 - 2 = 1$

A_1 non è diagonalizzabile

per $k = 2$

$$rk\left(A_2 + 4I_3\right) = rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

dunque $\dim V_{-4} = 3 - 1 = 2$

A_2 è diagonalizzabile

per $k = 3/2$

$$rk\left(A_{3/2} + 3I_3\right) = rk \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

dunque $\dim V_{-3} = 3 - 1 = 2$

$A_{3/2}$ è diagonalizzabile

per $k \neq 1, 2, 3/2$ A_k ha 3 autovalori distinti dunque è diagonalizzabile.

Si conclude che A_k è diagonalizzabile per $k \neq 1$

Esercizio 4:

(a) Risolvendo l'equazione che definisce U si ottiene

$$U = \langle (1,-1,0), (1,0,1) \rangle$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{(1,-1,0),(1,0,1)\}$ di U si ottiene

$$u_1 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$u_2' = (1,0,1) - \left((1,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \frac{1}{2}(1,1,2)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

Una base ortonormale di U è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) \right\}$

Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} (4,1,-2) \cdot (x,y,z) = 0 \\ (2,1,0) \cdot (x,y,z) = 0 \end{cases}$$

si ottiene $W^\perp = \langle (1,-2,1) \rangle$

Una base ortonormale di $W^\perp$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \right\}$

(b)

$$p_W(4,-1,0) = (4,-1,0) - \left((4,-1,0)\cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

$$= (4,-1,0) - \frac{6}{6}(1,-2,1)$$

$$= (3,1,-1)$$

Determiniamo ora $p_W^{-1}(\{(2,1,1)\})$.

Si ha $\operatorname{Im} p_W = W$. Inoltre, poiché $(2,1,1)\cdot(1,-2,1) = 1$

e $W^{\perp} = \langle (1,-2,1) \rangle$

si deduce che $(2,1,1) \notin W$

e dunque $p_W^{-1}(\{(2,1,1)\}) = \emptyset$.

Esercizio 5 :

(a) Determiniamo delle equazioni cartesiane di r.

$$r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$$

Eliminando il parametro α tra le x, y, z si ottiene

$$r : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Determiniamo una forma parametrica di π.

Risolvendo l'equazione $x - 2y = 1$ si ottiene

$$\pi = (1,0,0) + \langle (2,1,0), (0,0,1) \rangle$$

(b) Sia $v = (x, y, z)$ un vettore direttore di s,

si ha v parallelo a π se e solo se $x - 2y = 0$

v ortogonale a r se e solo se $x - 2y + z = 0$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

si ottiene $v = (2,1,0)$ (oppure un multiplo non nullo)

Dunque

$$s = (1,1,-1) + \langle (2,1,0) \rangle$$

(c) $r = (1,1,-1) + \langle (1,-2,1) \rangle$

$$P - O = (1,1,-1) - (0,0,0) = (1,1,-1)$$

Determiniamo la componente di $P-O$ ortogonale a r.

$$(P-O)_{\perp} = (1,1,-1) - \left((1,1,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

$$= (1,1,-1) + \frac{2}{6}(1,-2,1) = \frac{1}{3}\left((3,3,-3) + (1,-2,1) \right)$$

$$= \frac{1}{3}(4,1,-2)$$

Si ha $\text{dist}(r,O) = \|(P-O)_{\perp}\| = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$