Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2017

TEMA A

(1) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale W. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
 (a) (1pt) Se $\dim V = \dim W$ allora f è un isomorfismo.
 (b) (2pt) Se $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, allora $\dim V \leq \dim W$.
 (c) (2pt) Se $V = W = \mathbb{R}^3$, allora $\mathrm{Im}(f)$ è ortogonale a $\mathrm{Ker}(f)$.

Soluzione. a) Falso, controesempio: l'applicazione nulla tra due spazi vettoriali della stessa dimensione. b) Vero, perché per l'equazione delle dimensioni si ha $\dim V = \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim W$ dove la disuguaglianza è vera perché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W. (c) Falso, ad esempio se f è determinata da $f(e_1) = f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_1$ allora $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ che non è ortogonale ad $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{e_1\}$.

(2) Sia data l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $L_A X = AX$, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -9 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

 (a) (1pt) Si determini una base di $\mathrm{Im} L_A$.
 (b) (2pt) Si determini una base per $(\mathrm{Im} L_A)^\perp$.
 (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Ker} L_A$.
 (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{vmatrix}$ su $\mathrm{Ker} L_A$.
 (e) (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ associata all'applicazione L_A rispetto alla base$\mathcal{B}$.

Soluzione. a) $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$. b) $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$. c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} \right\}$. d) $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$. e) $\begin{vmatrix} 9 & 16 & -18 & -34 \\ -4 & -7 & 8 & 15 \\ 9 & 14 & -18 & -32 \\ -2 & -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

(3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P di coordinate $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, la retta r di equazioni parametriche $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$, per $a \in \mathbb{R}$, e la retta s di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$, $2x + 3y - 2z = 8$.

(a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per P e contenente r.
(b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di π ed s e se ne calcoli la distanza.
(c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r.

Soluzione. a) $y = 1$, b) π ed s sono paralleli, $d(s, \pi) = d\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}, \pi\right) = 3$. c) r ed s non si intersecano perché r è contenuta in π che non interseca s per quanto visto in b). La direzione di r è $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ mentre quella di s è $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, pertanto le due rette sono sghembe.

(4) Sia $z = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $w = \frac{z-2i}{(z+i)} + \frac{-1+4i}{(\bar{z}-i)}$.
(a) (2pt) Si determinino w e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $z = 2 + i$.
(b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero w sia reale.

Soluzione. a) $w = -1$, le radici cubiche sono $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, -1 e $\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})$. b) Sostituendo $z = a + ib$ nell'espressione di w e ponendone a 0 la parte immaginaria si trova la condizione $a = b + 1$.

(5) Sia data, al variare del parametro reale α, la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) (3pt) Si dica per quali valori di α la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?
(b) (1pt) Si dica per quali valori di α la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile.
(c) (1pt) Si determini una base di autovettori per $\alpha = 1$.

Soluzione. a) Le radici del polinomio caratteristico sono α e $\pm 2\sqrt{\alpha}$, quindi sono tutte reali solo se $\alpha \geq 0$ e sono tutte distinte se $\alpha \neq 0, 4$. Se $\alpha = 0$ coincidono ma A non è diagonale, quindi se $\alpha = 0$ la matrice A non è diagonalizzabile nè su $\mathbb{R}$ nè su $\mathbb{C}$. Se $\alpha = 4$, l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. In conclusione, A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 0$, $\alpha \neq 4$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $\alpha \neq 0, 4$. b) A non è simmetrica per alcun valore di α quindi non è mai ortogonalmente diagonalizzabile. c)In questo caso gli autovalori sono 1, 2, -2. Una base di autovettori è $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}\right\}$.

(6) Si considerino i sottospazi $U = \left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle$ e $W = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ 2x + 3y - 2z - 3w = 0 \end{array} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$.
(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap W$ ed una base di $U + W$.
(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di $\mathbb{R}^4$? Perché?

Soluzione. a) Base $U + W$: $\left\{\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right\}$. Base di $U \cap W$: $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. b) No, perchè $\{0\} \neq U \cap W \subset U + W$ quindi i due insiemi di vettori non possono essere linearmente indipendenti.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2017

TEMA B

(1) Sia $g\colon U \to W$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale U allo spazio vettoriale W. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
   (a) (2pt) Se $U = W = \mathbb{R}^4$, allora $\mathrm{Im}(g)$ è ortogonale a $\mathrm{Ker}(g)$.
   (b) (1pt) Se $\dim U = \dim W$ allora g è un isomorfismo.
   (c) (2pt) Se $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$, allora $\dim W \geq \dim U$.

Soluzione. a) Falso, ad esempio se g è determinata da $g(e_1) = g(e_2) = 0$, $g(e_3) = e_1$, $g(e_4) = e_2$ allora $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ che non è ortogonale ad $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. b) Falso, controesempio: l'applicazione nulla tra due spazi vettoriali della stessa dimensione. c) Vero, perché per l'equazione delle dimensioni si ha $\dim U = \dim \mathrm{Im}(g) \leq \dim W$ dove la disuguaglianza è vera perché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W.

(2) Sia data l'applicazione lineare $L_B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $L_B X = BX$, con

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

   (a) (1pt) Si determini una base di $\mathrm{Im}L_B$.
   (b) (2pt) Si determini una base per $(\mathrm{Im}L_B)^{\perp}$.
   (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Ker}L_B$.
   (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix}$ su $\mathrm{Ker}L_B$.
   (e) (2pt) Sia data la base $\mathcal{C} = \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(L_B)$ associata all'applicazione L_B rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Soluzione. a) $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$. b) $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$. c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{vmatrix} \right\}$. d) $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$. e) $\begin{vmatrix} 9 & 16 & -18 & -34 \\ -4 & -7 & 8 & 15 \\ 9 & 14 & -18 & -32 \\ -2 & -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

(3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto Q di coordinate $\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, la retta s di equazioni parametriche $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$, per $t \in \mathbb{R}$, e la retta r di equazioni cartesiane $x + y - z = -2$, $2x + 2y - 3z = -8$.

(a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano β passante per Q e contenente s.
(b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di β ed r e se ne calcoli la distanza.
(c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r.

Soluzione. a) $z = 1$, b) β ed r sono paralleli, $d(r,\beta) = d\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \beta\right) = 3$. c) r ed s non si intersecano perché s è contenuta in β che non interseca r per quanto visto in b). La direzione di s è $\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ mentre quella di r è $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, pertanto le due rette sono sghembe.

(4) Sia $x = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $y = \frac{\overline{x}+2i}{(\overline{x}-i)} + \frac{-1-4i}{(x+i)}$.
(a) (2pt) Si determinino y e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $x = 2 + i$.
(b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero y sia reale.

Soluzione. a) $y = -1$, le radici cubiche sono $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, -1 e $\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})$. b) Sostituendo $x = a + ib$ nell'espressione di y e ponendone a 0 la parte immaginaria si trova la condizione $a = b + 1$.

(5) Sia data, al variare del parametro reale β, la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 4\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \end{vmatrix}$$

(a) (3pt) Si dica per quali valori di β la matrice B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?
(b) (1pt) Si dica per quali valori di β la matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile.
(c) (1pt) Si determini una base di autovettori per $\beta = -1$.

Soluzione. a) Le radici del polinomio caratteristico sono $-\beta$ e $\pm 2\sqrt{-\beta}$, quindi sono tutte reali solo se $\beta \leq 0$ e sono tutte distinte se $\beta \neq 0, -4$. Se $\beta = 0$ coincidono ma B non è diagonale, quindi se $\beta = 0$ la matrice B non è diagonalizzabile nè su $\mathbb{R}$ nè su $\mathbb{C}$. Se $\beta = -4$, l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. In conclusione, B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta < 0$, $\beta \neq -4$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $\beta \neq 0, -4$. b) B non è simmetrica per alcun valore di β quindi non è mai ortogonalmente diagonalizzabile. c)In questo caso gli autovalori sono -1, 2, -2. Una base di autovettori è $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}\right\}$.

(6) Si considerino i sottospazi $V = \left\langle \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$ e $U = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ 3x + 2y - 3z - 2w = 0 \end{array} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$.
(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.
(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di $\mathbb{R}^4$? Perché?

Soluzione. a) Base $U + V$: $\left\{\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. Base di $U \cap V$: $\left\{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right\}$. b) No, perchè $\{0\} \neq U \cap V \subset U + V$ quindi i due insiemi di vettori non possono essere linearmente indipendenti.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2017

TEMA C

(1) Sia $f: V \to U$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale U. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
  (a) (2pt) Se $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, allora $\dim U \geq \dim V$.
  (b) (2pt) Se $U = V = \mathbb{R}^4$, allora $\mathrm{Im}(f)$ è ortogonale a $\mathrm{Ker}(f)$.
  (c) (1pt) Se $\dim V = \dim U$ allora f è un isomorfismo.

Soluzione. a) Vero, perché per l'equazione delle dimensioni si ha $\dim V = \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim U$ dove la disuguaglianza è vera perché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di U. b) Falso, ad esempio se f è determinata da $f(e_1) = f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_1$, $f(e_4) = e_2$, allora $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ che non è ortogonale ad $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. c) Falso, controesempio: l'applicazione nulla tra due spazi vettoriali della stessa dimensione.

(2) Sia data l'applicazione lineare $L_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $L_C X = CX$, con

$$C = \begin{vmatrix} -6 & 7 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & -9 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

  (a) (1pt) Si determini una base di $\mathrm{Im}L_C$.
  (b) (2pt) Si determini una base per $(\mathrm{Im}L_C)^\perp$.
  (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Ker}L_C$.
  (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{vmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ su $\mathrm{Ker}L_C$.
  (e) (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_C)$ associata all'applicazione L_C rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. a) $\left\{ \begin{vmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \\ -9 \end{vmatrix} \right\}$. b) $\left\{ \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$. c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{vmatrix} \right\}$. d) $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$. e) $\begin{vmatrix} 9 & 16 & -18 & -34 \\ -4 & -7 & 8 & 15 \\ 9 & 14 & -18 & -32 \\ -2 & -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

(3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P di coordinate $\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, la retta s di equazioni parametriche $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, per $l \in \mathbb{R}$, e la retta r di equazioni cartesiane $x + y - z = -2$, $2x + 3y - 2z = -8$.

(a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano γ passante per P e contenente s.
(b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di γ ed r e se ne calcoli la distanza.
(c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di r ed s.

Soluzione. a) $y = -1$, b) γ ed r sono paralleli, $d(r, \gamma) = d\left(\begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix}, \gamma\right) = 3$. c) r ed s non si intersecano perché s è contenuta in γ che non interseca r per quanto visto in b). La direzione di r è $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ mentre quella di s è $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, pertanto le due rette sono sghembe.

(4) Sia $w = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $z = \frac{-1+4i}{(\overline{w}-i)} - \frac{2i-w}{(i+w)}$.
(a) (2pt) Si determinino w e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $z = 2 + i$.
(b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero z sia reale.
(c) (1pt) Si determinino i valori di w per i quali z è reale e w ha modulo 1.

Soluzione. a) $z = -1$, le radici cubiche sono $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, -1 e $\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})$. b) Sostituendo $w = a + ib$ nell'espressione di z e ponendone a 0 la parte immaginaria si trova la condizione $a = b + 1$.

(5) Sia data, al variare del parametro reale γ, la matrice

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 4\gamma & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) (3pt) Si dica per quali valori di δ la matrice B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?
(b) (1pt) Si dica per quali valori di γ la matrice C è ortogonalmente diagonalizzabile.
(c) (1pt) Si determini una base di autovettori per $\gamma = 1$.

Soluzione. a) Le radici del polinomio caratteristico sono γ e $\pm 2\sqrt{\gamma}$, quindi sono tutte reali solo se $\gamma \geq 0$ e sono tutte distinte se $\gamma \neq 0, 4$. Se $\gamma = 0$ coincidono ma C non è diagonale, quindi se $\gamma = 0$ la matrice C non è diagonalizzabile nè su $\mathbb{R}$ nè su $\mathbb{C}$. Se $\gamma = 4$ l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. In conclusione, C è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\gamma > 0$, $\gamma \neq 4$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $\gamma \neq 0, 4$. b) C non è simmetrica per alcun valore di γ quindi non è mai ortogonalmente diagonalizzabile. c)In questo caso gli autovalori sono 1, 2, -2. Una base di autovettori è $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix}\right\}$.

(6) Si considerino i sottospazi $W = \left\langle \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle$ e $V = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ -2x - 3y + 2z + 3w = 0 \end{array} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$.
(a) (3pt) Determinare una base di $V \cap W$ ed una base di $V + W$.
(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di $\mathbb{R}^4$? Perché?

Soluzione. a) Base $W + V$: $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. Base di $W \cap V$: $\left\{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. b) No, perchè $\{0\} \neq W \cap V \subset W + V$ quindi i due insiemi di vettori non possono essere linearmente indipendenti.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2017

TEMA D

(1) Sia $g\colon W \to U$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale W allo spazio vettoriale U. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
  (a) (2pt) Se $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$, allora $\dim W \leq \dim U$.
  (b) (1pt) Se $\dim W = \dim U$ allora g è un isomorfismo.
  (c) (2pt) Se $U = W = \mathbb{R}^3$, allora $\mathrm{Im}(g)$ è ortogonale a $\mathrm{Ker}(g)$.

Soluzione. a) Vero, perché per l'equazione delle dimensioni si ha $\dim W = \dim \mathrm{Im}(g) \leq \dim U$ dove la disuguaglianza è vera perché $\mathrm{Im}(g)$ è un sottospazio di U. b) Falso, controesempio: l'applicazione nulla tra due spazi vettoriali della stessa dimensione. c) Falso, ad esempio se g è determinata da $g(e_1) = g(e_2) = 0$, $g(e_3) = e_1$ allora $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ che non è ortogonale ad $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{span}\{e_1\}$.

(2) Sia data l'applicazione lineare $L_D\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $L_D X = DX$, con

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & -1 & 3 \\ -9 & 8 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

  (a) (1pt) Si determini una base di $\mathrm{Im}L_D$.
  (b) (2pt) Si determini una base per $(\mathrm{Im}L_D)^\perp$.
  (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Ker}L_D$.
  (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ su $\mathrm{Ker}L_D$.
  (e) (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_D)$ associata all'applicazione L_D rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione. a) $\left\{ \begin{vmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{vmatrix} \right\}$. b) $\left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$. c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix} \right\}$. d) $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$. e) $\begin{vmatrix} 9 & 16 & -18 & -34 \\ -4 & -7 & 8 & 15 \\ 9 & 14 & -18 & -32 \\ -2 & -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

(3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto Q di coordinate $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$, la retta r di equazioni parametriche $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$, per $t \in \mathbb{R}$, e la retta s di equazioni cartesiane $x + y + z = 2$, $3x + 2y + 2z = 8$.

(a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per Q e contenente r.
(b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di α ed s e se ne calcoli la distanza.
(c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r.

Soluzione. a) $x = 1$, b) α ed s sono paralleli, $d(s, \alpha) = d\left(\begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \alpha\right) = 3$. c) r ed s non si intersecano perché r è contenuta in α che non interseca s per quanto visto in b). La direzione di r è $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ mentre quella di s è $\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, pertanto le due rette sono sghembe.

(4) Sia $y = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $x = \frac{-1-4i}{(y+i)} + \frac{\overline{y}+2i}{(\overline{y}-i)}$.
(a) (2pt) Si determinino x e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $y = 2 + i$.
(b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero x sia reale.

Soluzione. a) $x = -1$, le radici cubiche sono $\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})$, -1 e $\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})$. b) Sostituendo $y = a + ib$ nell'espressione di x e ponendone a 0 la parte immaginaria si trova la condizione $a = b + 1$.

(5) Sia data, al variare del parametro reale δ, la matrice

$$D = \begin{vmatrix} -\delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\delta \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) (3pt) Si dica per quali valori di δ la matrice D è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?
(b) (1pt) Si dica per quali valori di δ la matrice D è ortogonalmente diagonalizzabile.
(c) (1pt) Si determini una base di autovettori per $\delta = -1$.

Soluzione. a) Le radici del polinomio caratteristico sono $-\delta$ e $\pm 2\sqrt{-\delta}$, quindi sono tutte reali solo se $\delta \leq 0$ e sono tutte distinte se $\delta \neq 0, -4$. Se $\delta = 0$ coincidono ma D non è diagonale, quindi se $\delta = 0$ la matrice D non è diagonalizzabile nè su $\mathbb{R}$ nè su $\mathbb{C}$. Se $\delta = -4$ l'autovalore 4 ha molteplicità geometrica 1 e molteplicità algebrica 2. In conclusione, D è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\delta < 0$, $\delta \neq -4$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $\delta \neq 0, -4$. b) D non è simmetrica per alcun valore di δ quindi non è mai ortogonalmente diagonalizzabile. c)In questo caso gli autovalori sono 1, 2, -2. Una base di autovettori è $\left\{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{vmatrix}\right\}$.

(6) Si considerino i sottospazi $W = \left\langle \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\rangle$ e $U = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ -3x - 2y + 3z + 2w = 0 \end{array} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$.
(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap W$ ed una base di $U + W$.
(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di $\mathbb{R}^4$? Perché?

Soluzione. a) Base $W + U$: $\left\{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. Base di $W \cap U$: $\left\{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right\}$. b) No, perchè $\{0\} \neq W \cap U \subset W + U$ quindi i due insiemi di vettori non possono essere linearmente indipendenti.