Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

6 giugno 2018

TEMA A

(1) Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere o un controesempio nel caso in cui non lo siano.
  (a) Ogni numero complesso ammette un inverso.
  (b) Ogni matrice ammette un'opposta.
  (c) Una applicazione lineare è iniettiva se se solo se è suriettiva.

---

(2) Sia dato, al variare del parametro reale α, il sottoinsieme $\mathcal{B}_\alpha = \{(0, 2, \alpha), (1, 1, 0), (0, -3, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.
  (a) Si dica per quali valori di α l'insieme ordinato $\mathcal{B}_\alpha$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.
  (b) Per i valori di α trovati al punto (a), sia $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}_\alpha,\Phi_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_\alpha}$ associata a Φ_α rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$.
  (c) Per i valori di α trovati al punto (a) si determini una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare Φ_α.
  (d) Determinare per quali valori di α, tra quelli trovati al punto (a), l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(1, -1, 1)$ è vuoto.
  (e) Determinare, l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(1, -1, 1)$ per i valori trovati al punto (a) e per i quali tale insieme è non vuoto.

---

(3) Si consideri il sottospazio $U =< (1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.
  (a) Determinare una base di U e delle equazioni che definiscano U.
  (b) Sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U, determinare una base ortonormale di W .
  (c) Sia $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W, determinare $\pi_W(2, 0, 1, 1)$.
  (d) Sia $V =< (2, 0, 1, 1) >$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W.

---

(4) Sia dato k un parametro reale e sia data l'applicazione lineare $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & k & 0 \\ 0 & -3 & k-1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, al variare di k, autovalori e molteplicità algebrica degli autovalori di f_k.
(b) Determinare, al variare di k, autospazi e molteplicità geometrica degli autovalori di f_k .
(c) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile; per tali valori determinare una base di autovettori.
(d) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

---

(5) Sia dato il seguente numero complesso w:

$$w = \frac{7+i}{\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))} - (1 + 2(2-\sqrt{3})i).$$

(a) Si determinino forma algebrica e forma trigonometrica di w.
(b) Si determini il numero di soluzioni complesse dell'equazione $X^5 + wX = 0$.
(c) Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $X^5 - 2wX = 0$.

---

(6) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{gathered} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{gathered}$$

e la retta $s = (-1, 2, 0) + < (8, -4, -4) >$
(a) Trovare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s.
(b) Determinare posizione reciproca e distanza tra r e s.
(c) Determinare un piano π contenente s e tale che la distanza tra r e π sia uguale alla distanza tra r e s.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

6 giugno 2018

TEMA B

(1) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} -y+z&=0 \\ -x+y+z&=1 \end{aligned}$$

e la retta $s = (1,0,2) + < (-8,-4,-4) >$

(a) Trovare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s.
(b) Determinare posizione reciproca e distanza tra r e s.
(c) Determinare un piano π contenente s e tale che la distanza tra r e π sia uguale alla distanza tra r e s.

---

(2) Sia dato k un parametro reale e sia data l'applicazione lineare $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & k+1 & 0 \\ 0 & -3 & k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, al variare di k, autovalori e molteplicità algebrica degli autovalori di f_k.
(b) Determinare, al variare di k, autospazi e molteplicità geometrica degli autovalori di f_k .
(c) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile; per tali valori determinare una base di autovettori.
(d) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

---

(3) Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere o un controesempio nel caso in cui non lo siano.

(a) Ogni numero complesso ammette un inverso.
(b) Ogni matrice ammette un'opposta.
(c) Una applicazione lineare è iniettiva se se solo se è suriettiva.

---

(4) Sia dato, al variare del parametro reale α, il sottoinsieme $\mathcal{B}_\alpha = \{(0, \alpha, 2), (-1, 0, 1), (0, 1, -3)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quali valori di α l'insieme ordinato $\mathcal{B}_\alpha$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Per i valori di α trovati al punto (a), sia $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{B}_\alpha, \Phi_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_\alpha}$ associata a Φ_α rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$.

(c) Per i valori di α trovati al punto (a) si determini una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare Φ_α.

(d) Determinare per quali valori di α, tra quelli trovati al punto (a), l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(-1, 1, -1)$ è vuoto.

(e) Determinare, l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(-1, 1, -1)$ per i valori trovati al punto (a) e per i quali tale insieme è non vuoto.

---

(5) Si consideri il sottospazio $U =< (-1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una base di U e delle equazioni che definiscano U.

(b) Sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U, determinare una base ortonormale di W .

(c) Sia $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W, determinare $\pi_W(-2, 1, 0, 1)$.

(d) Sia $V =< (-2, 1, 0, 1) >$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W.

---

(6) Sia dato il seguente numero complesso w:

$$w = \frac{7 - i}{\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) - i \sin(\frac{7\pi}{4}))} - (1 - 2(2 - \sqrt{3})i).$$

(a) Si determinino forma algebrica e forma trigonometrica di w.

(b) Si determini il numero di soluzioni complesse dell'equazione $X^6 + wX = 0$.

(c) Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $X^6 - 2wX = 0$.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

6 giugno 2018

TEMA C

(1) Si consideri il sottospazio $U =< (0,1,1,1),(1,0,-1,1) >$ di $\mathbb{R}^4$.
   (a) Determinare una base di U e delle equazioni che definiscano U.
   (b) Sia $W = U^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di U, determinare una base ortonormale di W .
   (c) Sia $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W, determinare $\pi_W(1,0,2,1)$.
   (d) Sia $V =< (1,0,2,1) >$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W.

---

(2) Sia dato il seguente numero complesso w:
$$w = \frac{7+i}{\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))} - (1 + 2(2-\sqrt{3})i).$$
   (a) Si determinino forma algebrica e forma trigonometrica di w.
   (b) Si determini il numero di soluzioni complesse dell'equazione $X^4 + wX = 0$.
   (c) Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $X^4 - 2wX = 0$.

---

(3) Sia dato k un parametro reale e sia data l'applicazione lineare $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, con
$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & k-1 & 0 \\ 0 & -3 & k-2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Determinare, al variare di k, autovalori e molteplicità algebrica degli autovalori di f_k.
   (b) Determinare, al variare di k, autospazi e molteplicità geometrica degli autovalori di f_k .
   (c) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile; per tali valori determinare una base di autovettori.
   (d) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

---

(4) Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere o un controesempio nel caso in cui non lo siano.
 (a) Ogni numero complesso ammette un inverso.
 (b) Ogni matrice ammette un'opposta.
 (c) Una applicazione lineare è iniettiva se se solo se è suriettiva.

---

(5) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} -x - y &= 0 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

e la retta $s = (0, -2, -1) + < (-4, 4, 8) >$
 (a) Trovare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s.
 (b) Determinare posizione reciproca e distanza tra r e s.
 (c) Determinare un piano π contenente s e tale che la distanza tra r e π sia uguale alla distanza tra r e s.

---

(6) Sia dato, al variare del parametro reale α, il sottoinsieme $\mathcal{B}_\alpha = \{(\alpha, -2, 0), (0, -1, 1), (1, 3, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$.
 (a) Si dica per quali valori di α l'insieme ordinato $\mathcal{B}_\alpha$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.
 (b) Per i valori di α trovati al punto (a), sia $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{B}_\alpha, \Phi_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

 Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \Phi_\alpha}$ associata a Φ_α rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$.
 (c) Per i valori di α trovati al punto (a) si determini una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare Φ_α.
 (d) Determinare per quali valori di α, tra quelli trovati al punto (a), l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(1, 1, 1)$ è vuoto.
 (e) Determinare, l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(1, 1, 1)$ per i valori trovati al punto (a) e per i quali tale insieme è non vuoto.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

6 giugno 2018

TEMA D

(1) Sia dato, al variare del parametro reale α, il sottoinsieme $\mathcal{B}_\alpha = \{(2, 0, -\alpha), (1, 1, 0), (-3, 0, -1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.
  (a) Si dica per quali valori di α l'insieme ordinato $\mathcal{B}_\alpha$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.
  (b) Per i valori di α trovati al punto (a), sia $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che
$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}_\alpha,\Phi_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_\alpha}$ associata a Φ_α rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$.
  (c) Per i valori di α trovati al punto (a) si determini una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare Φ_α.
  (d) Determinare per quali valori di α, tra quelli trovati al punto (a), l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(-1, 1, -1)$ è vuoto.
  (e) Determinare, l'insieme $\Phi_\alpha^{-1}(-1, 1, -1)$ per i valori trovati al punto (a) e per i quali tale insieme è non vuoto.

---

(2) Si consideri il sottospazio $U =< (-1, 1, 0, 1), (0, -1, -1, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.
  (a) Determinare una base di U e delle equazioni che definiscano U.
  (b) Sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U, determinare una base ortonormale di W .
  (c) Sia $\pi_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W, determinare $\pi_W(0, 2, -1, 1)$.
  (d) Sia $V =< (0, 2, -1, 1) >$, determinare la controimmagine $\pi_W^{-1}(V)$ del sottospazio V tramite la proiezione ortogonale π_W.

---

(3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r di equazioni cartesiane
$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$
e la retta $s = (2, -1, 0)+ < (-4, 8, 4) >$
  (a) Trovare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s.
  (b) Determinare posizione reciproca e distanza tra r e s.
  (c) Determinare un piano π contenente s e tale che la distanza tra r e π sia uguale alla distanza tra r e s.

(4) Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere o un controesempio nel caso in cui non lo siano.

(a) Ogni numero complesso ammette un inverso.
(b) Ogni matrice ammette un'opposta.
(c) Una applicazione lineare è iniettiva se se solo se è suriettiva.

(5) Sia dato k un parametro reale e sia data l'applicazione lineare $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & -k+1 & 0 \\ 0 & -3 & -k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, al variare di k, autovalori e molteplicità algebrica degli autovalori di f_k.
(b) Determinare, al variare di k, autospazi e molteplicità geometrica degli autovalori di f_k .
(c) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile; per tali valori determinare una base di autovettori.
(d) Determinare per quali k l'endomorfismo f_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

(6) Sia dato il seguente numero complesso w:

$$w = (1 + 2(2 - \sqrt{3})i) - \frac{7 + i}{\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))}.$$

(a) Si determinino forma algebrica e forma trigonometrica di w.
(b) Si determini il numero di soluzioni complesse dell'equazione $X^7 + wX = 0$.
(c) Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $X^7 - 2wX = 0$.