Risoluzione dell'appello del 19/09/2018 (tema A)

Esercizio 1:

(a) vero.

dimostrazione: $\det(f \circ f) = \det(2I) = \det \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} = 16$

ma anche $\det(f \circ f) = \det(f)\det(f)$

dunque $\det(f) = 4 \neq 0$

L'endomorfismo f è quindi invertibile.

(b) falso.

controesempio: Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente la seguente matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, T} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2:

(a) falso.

controesempio: $U = \langle (1,0,0) \rangle$, $V = \langle (1,1,1) \rangle$

(b) vero.

dimostrazione: Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U.

Sia $v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v \cdot u_1 = \dots = v \cdot u_k = 0$.

Allora, per linearità si ha $v \cdot u = 0$ per ogni $u \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle = U$.

Esercizio 3:

(a) Polinomio caratteristico di A_t:

$$P_{A_t}(\lambda) = \det\left(A_t - \lambda I_4\right) = \left(\lambda - (1-t)\right)\left(\lambda - (t-1)\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right)$$

radici di $P_{A_t}(\lambda)$: $0, 2, 1-t, t-1$

autovalori di A_t:

caso $t \neq 1, -1, 3$

A_t ha quattro autovalori di molteplicità algebrica e geometrica 1
$0, 2, 1-t, t-1$
Dunque A_t è diagonalizzabile in questo caso

caso $t = 1$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori di A_1: 0 con molt. alg. 3
2 con molt. alg. 1

autospazi:

$$V_0 = \ker A_1 = \langle (1,0,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

$\dim V_0 = 3$, dunque A_1 è diagonalizzabile.

caso $t=-1$:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

autovalori di A_{-1}: 0 con molt. alg. 1
-2 con molt. alg. 1
2 con molt. alg. 2

autospazi:

$$V_2 = \ker(A_{-1} - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \langle (2,0,0,1), (0,0,1,0) \rangle$$

$\dim V_2 = 2$, dunque A_{-1} è diagonalizzabile

caso $t=3$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

autovalori di A_3: 0 con molt. alg. 1
-2 con molt. alg. 1
2 con molt. alg. 2

autospazi:

$$V_2 = \ker(A_3 - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,2,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

$\dim V_2 = 2$, dunque
A_3 è diagonalizzabile.

Si conclude che A_t è diagonalizzabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ A_0 è simmetrica dunque ortogonalmente diagonalizzabile

autovalori di A_0: 0 con molt. alg. 1
-1 con molt. alg. 1
1 con molt. alg. 1
2 con molt. alg. 1

<u>autospazi</u>:

$V_0 = \langle (0,1,-1,0) \rangle$ $\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0) \right\}$ è una base ortonormale di V_0

$V_{-1} = \langle (0,0,0,1) \rangle$ $\quad \{ (0,0,0,1) \}$ è una base ortonormale di V_{-1}

$V_1 = \langle (1,0,0,0) \rangle$ $\quad \{ (1,0,0,0) \}$ è una base ortonormale di V_1

$V_2 = \langle (0,1,1,0) \rangle$ $\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0) \right\}$ è una base ortonormale di V_2

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0) \right\}$ base ortonormale di autovettori di A_0

Segue che $P^t A_0 P = D$ con $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{rk} A_t = 1 \quad \forall t \neq 1$

$\operatorname{rk} A_1 = 3$

<u>caso $t \neq 1$</u>:

$\ker A_t = \langle (0,1,-1,0) \rangle$

$\operatorname{Im} A_t = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,t+1,t-1,0) \rangle$

<u>caso $t = 1$</u>:

$\ker A_1 = \langle (1,0,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$

$\operatorname{Im} A_1 = \langle (0,1,0,0) \rangle$

Esercizio 4:

(a) $r = (1,0,0) + \langle (1,1,1) \rangle$

$$s_a : \begin{cases} x - z = 1 - a \\ ay - 2z = -a^2 \end{cases}$$

(b) $r = (1,0,0) + \langle (1,1,1) \rangle$

$s_a = (1-a, -a, 0) + \langle (a, 2, a) \rangle$

dunque per $a = 2$, r e s_2 sono parallele distinte, poiché $(3,-2,0) \in s_2$ ma $(3,-2,0) \notin r$.

per $a \neq 2$ le rette s_a e r non sono parallele, dunque possono essere incidenti oppure sghembe

sono sghembe per $a \neq 0, 2$

infatti, discutendone il sistema che definisce $r \cap s_a$ si trova

$r \cap s_a = \emptyset$ per $a \neq 0$

$r \cap s_0 = (1,0,0)$

Le rette r e s_0 sono quindi incidenti nel punto $(1,0,0)$.

(c) r e s_a sono ortogonali se e solo se

$$(1,1,1) \cdot (a,2,a) = 0$$

ossia per $a = -1$.

(d) r e s_1 sono sghembe

$$r = (1,0,0) + \langle (1,1,1) \rangle \ , \ s_1 = (0,-1,0) + \langle (1,2,1) \rangle$$

$$\mathrm{dist}(r, s_1) = \frac{\left| (1,1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \right|}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \right\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 5:

(a) $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiezione ortogonale su $U = \langle (5,0,5), (2,1,3), (3,-1,2) \rangle$

p_U ha due autovalori: 0, 1

I corrispondenti autospazi di p_U sono:

$V_0 = U^\perp = \langle (1,1,-1) \rangle$

$V_1 = U = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

Una base ortonormale di $U^\perp$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}$

Una base ortonormale di U è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1) \right\}$

(b) $$p_U(6,1,4) = (6,1,4) - \left((6,1,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$
$$= (6,1,4) - (1,1,-1) = (5,0,5)$$

(c) Sia $v \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v + p_U(v) = (5,3,5)$,

allora $p_U(v) + p_U(p_U(v)) = p_U(5,3,5)$

cioè $2p_U(v) = p_U(5,3,5) = (4,2,6)$

segue che $p_U(v) = (2,1,3)$

e dunque $v = (5,3,5) - p_U(v) = (3,2,2)$

Esercizio 6:

(a) $z = -2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

(b) radici cubiche di z:

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4}{9}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad k=0,1,2$$